

HENRI PICCIOLI

**Sur un procédé pour parvenir à
l'équation intrinsèque des lignes du
cylindre de révolution**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 402-405

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_402_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

[03j]

**SUR UN PROCÉDÉ POUR PARVENIR A L'ÉQUATION INTRINSÈQUE
DES LIGNES DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION;**

PAR M. HENRI PICCIOLI, à Arpino.

La recherche de l'équation intrinsèque des courbes qui sont tracées sur un cylindre de révolution peut être rattachée aux formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_1}{ds} = \frac{M_2}{\rho}, \\ \frac{dM_2}{ds} = -\frac{M_1}{\rho} - \frac{M_3}{T} + \cos\theta_3, \\ \frac{dM_3}{ds} = \frac{M_2}{T} - \cos\theta_2, \end{array} \right.$$

qui lient les moments des directions principales d'une

courbe gauche C par rapport à une droite fixe r avec laquelle elles font respectivement les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (1).

A cet effet, rappelons que le carré de la distance d'un point à une droite égale la somme des carrés des moments de cette droite par rapport à trois droites orthogonales issues du point donné; l'expression $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ représentera donc le carré de la distance d'un point P de C à r .

La condition que P décrive une ligne appartenant à un cylindre de révolution d'axe r , se traduira ainsi :

$$(2) \quad M_2 \cos \theta_3 - M_3 \cos \theta_2 = 0,$$

relation qu'on obtiendra en annulant la dérivée par rapport à l'arc s de l'expression $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ et tenant compte des formules (1).

Il s'ensuit de là que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne appartienne à un cylindre de révolution ayant pour axe une droite donnée est que les plus courtes distances de la normale principale et de la binormale à l'axe soient entre elles comme les cotangentes des angles correspondants.

Posons maintenant

$$m_1 = M_2 \cos \theta_3 - M_3 \cos \theta_2,$$

$$m_2 = M_3 \cos \theta_1 - M_1 \cos \theta_3,$$

$$m_3 = M_1 \cos \theta_2 - M_2 \cos \theta_1;$$

(1) Voir ma Note Sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe (Nouv. Ann., avril 1902).

nous verrons aisément que m_1 , m_2 , m_3 satisfont aux relations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dm_1}{ds} = \frac{m_2}{\rho} + \sin^2 \theta_1 \\ \frac{dm_2}{ds} = -\frac{m_1}{\rho} - \frac{m_3}{T} - \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \frac{dm_3}{ds} = \frac{m_2}{T} - \cos \theta_1 \cos \theta_3. \end{cases}$$

Posant m_1 égal à zéro, et éliminant m_2 et m_3 , nous trouverons une relation du type

$$(a) \quad \begin{cases} A_1 \cos^2 \theta_1 + A_2 \cos^2 \theta_2 + A_3 \cos^2 \theta_3 + A_{12} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \quad + A_{23} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + A_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 + A = 0, \end{cases}$$

où

$$A_1 = \frac{2}{\rho} - H_3 \quad (1), \quad A_2 = -\frac{2}{\rho}, \quad A_3 = 0;$$

$$A_{12} = -T \frac{d\rho}{ds}, \quad A_{23} = 0, \quad A_{13} = 1 - \frac{2}{T}, \quad A = H_3.$$

En différenciant et en tenant compte des formules de Serret, on parviendra de là à une deuxième relation du même type

$$(b) \quad \begin{cases} B_1 \cos^2 \theta_1 + B_2 \cos^2 \theta_2 + B_3 \cos^2 \theta_3 + B_{12} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \quad + B_{23} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + B_{13} \cos \theta_1 \cos \theta_3 + B = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients seront liés à ceux de (a) par les

(1) Nous rappelons que H_3 n'est autre chose que l'expression

$$\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{d\rho}{ds} \right),$$

qui, égale à zéro, donne l'équation intrinsèque des courbes sphériques.

formules

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{dA_1}{ds} - \frac{A_{12}}{\rho}, \\
 B_2 &= \frac{dA_2}{ds} + \frac{A_{12}}{\rho} + \frac{A_{23}}{T}, \\
 B_3 &= \frac{dA_3}{ds} - \frac{A_{23}}{T}, \\
 B_{12} &= \frac{dA_{12}}{ds} + 2\frac{A_1}{\rho} - 2\frac{A_2}{\rho} + \frac{A_{13}}{T}, \\
 B_{23} &= \frac{dA_{23}}{ds} - 2\frac{A_2}{T} + \frac{A_{13}}{\rho} + \frac{A_3}{T}, \\
 B_{13} &= \frac{dA_{13}}{ds} - \frac{A_{12}}{T} - \frac{A_{23}}{\rho}, \\
 B &= \frac{dA}{ds}.
 \end{aligned}$$

En procédant ainsi nous parviendrons à une troisième relation dont les coefficients seront exprimables par les B comme les B le sont par les A.

Différentions encore jusqu'à obtenir *sept* relations de cette nature. Leur coexistence exige que l'on ait

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation cherchée : c'est une équation différentielle ordinaire du *huitième* ordre par rapport à ρ , et du *septième* par rapport à T. Elle est très compliquée. On peut la simplifier en remarquant que l'on a

$$A_1 + A_2 + A_3 + A = 0$$

et, par conséquent,

$$B_1 + B_2 + B_3 + B = 0,$$

et ainsi de suite.
