DE SPARRE

Remarques au sujet de la question de mécanique posée au concours d'agrégation en 1903

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 38-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__38_1>

[R8aα]

REMARQUES AU SUJET DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE POSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1903;

PAR M. DE SPARRE.

L'énoncé de cette question, en la réduisant à ce qui est nécessaire pour ce qui suit, est le suivant :

Une sphère solide homogène de masse m et de rayon a est mobile autour de son centre O supposé fixe. Dans la sphère est creusé un canal rectiligne de section infiniment petite, suivant un diamètre DD'; deux insectes ayant chacun la même masse que la sphère se trouvent dans ce canal, en deux points I et I' symétriques par rapport au centre O. A l'instant initial, $t = 0$, la sphère est animée d'une rotation ω autour d'un axe instantané donné et, à partir de cet instant, les insectes marchent dans le canal, suivant une loi donnée, en prenant appui sur ses parois et restant toujours symétriques par rapport au centre O.

Trouver le mouvement du système, en réduisant les insectes à des points matériels.

Si z et $-z$ sont les distances des deux insectes au centre O, dans le canal DD′, on suppose z une fonction donnée du temps $z = f(t)$.

Cas particuliers. — 1° *A l'instant initial l'axe instantané est dans le plan perpendiculaire à DD′;*

2° *L'axe instantané initial est quelconque, mais on a $z = ae^{-kt}$, k étant une constante positive.*

Une partie de l'énoncé que je ne reproduis pas invitait les candidats à calculer tout d'abord les composantes p, q, r de la rotation instantanée de la sphère suivant trois axes fixes par rapport à cette sphère. Cette méthode conduit à des calculs beaucoup plus compliqués que la suivante, presque intuitive.

Le moment d'inertie du système par rapport à DD′ est

$$\frac{2}{5} ma^2.$$

Le moment d'inertie par rapport à un diamètre perpendiculaire à DD′ est

$$2m\left(\frac{a^2}{5} + z^2\right).$$

Les forces extérieures, qui se réduisent à la pesanteur, ont un moment nul par rapport à l'origine, les deux insectes occupant des positions toujours symétriques; par suite l'axe du couple résultant des quantités de mouvement est invariable de grandeur et de position.

Prenons cet axe pour axe des Z fixes et soit $\frac{2}{5} ma^2 h$ la grandeur de cet axe.

Soient :

θ l'angle de DD' avec l'axe du couple résultant des quantités de mouvement OZ;

ψ l'angle avec OX de la trace OR sur XOY du plan perpendiculaire à OD mené par O;

φ l'angle d'un rayon de la sphère, fixe par rapport à cette sphère avec OR.

En exprimant que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OD, OR et à la perpendiculaire O et OD' dans le plan ZOD sont les projections sur ces droites de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, on a

$$\frac{2}{5} ma^2 h \cos\theta = \frac{2}{5} ma^2 (\psi' \cos\theta + \varphi'), \tag{1}$$

$$\theta' = 0, \tag{2}$$

$$\frac{2}{5} ma^2 h \sin\theta = 2m \left(\frac{a^2}{5} + z^2\right) \psi' \sin\theta, \tag{3}$$

puisque les composantes de la rotation suivant OD, OR, OQ sont $\psi' \cos\theta + \varphi'$, θ' et $\psi' \sin\theta$, et que ces axes sont principaux.

La deuxième équation donne

$$\theta = \text{const.}$$

et l'on déduit alors de la première

$$\psi' \cos\theta + \varphi' = h \cos\theta = \text{const.}, \tag{4}$$

et de la troisième

$$\psi' = \frac{h}{1 + \dfrac{5z^2}{a^2}}. \tag{5}$$

Le problème est donc complètement résolu par les formules suivantes, z étant fonction du temps :

$$\theta = \text{const.}, \tag{6}$$

$$\psi = \int_0^t \frac{h\,dt}{1 + \frac{5z^2}{a^2}}, \tag{7}$$

$$\varphi = (ht - \psi)\cos\theta. \tag{8}$$

Si l'on veut de plus les composantes p et q de la rotation suivant deux diamètres perpendiculaires à OD, fixes par rapport à la sphère et rectangulaires entre eux, on aura

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi, \qquad q = \psi' \sin\theta \cos\varphi.$$

L'axe instantané initial est d'ailleurs situé dans le plan ZOD, et si λ est l'angle qu'il fait avec OD, on a

$$\omega \cos\lambda = \psi'_0 \cos\theta + \varphi'_0 = h\cos\theta, \tag{9}$$

$$\omega \sin\lambda = \psi'_0 \sin\theta \qquad = \frac{h}{1 + \frac{5z_0^2}{a^2}} \sin\theta; \tag{10}$$

d'où l'on déduira, si λ et ω sont donnés, ainsi que z_0, θ et h :

1° Si $\lambda = 90°$, on aura

$$\theta = 90°, \qquad h = \left(1 + \frac{5z_0^2}{a^2}\right)\omega;$$

on en déduit

$$\varphi' = 0,$$

et le mouvement se réduit à une rotation autour de l'axe fixe OZ dont la vitesse angulaire est fournie par (5);

2° $z = ae^{-kt}$, on a

$$\psi = \int_a^t \frac{h\,dt}{1 + 5e^{-2kt}} = h\int_0^t \left(1 - \frac{5e^{-2kt}}{1 + 5e^{-2kt}}\right) dt,$$

ou

$$\psi = ht + \frac{h}{2k} \mathrm{L}\left(\frac{1 + 5e^{-2kt}}{6}\right)$$

et, par suite,

$$\varphi = \frac{h\cos\theta}{2k} \mathrm{L} \frac{6}{1 + 5e^{-2kt}}.$$

Ces valeurs font voir que φ tend vers une valeur finie et que le mouvement tend vers une rotation uniforme autour de l'axe OZ du couple résultant des quantités de mouvement avec la vitesse angulaire h.

Dans ce cas, d'ailleurs, on a, en vertu de (9) et (10),

$$\omega \cos\lambda = h\cos\theta,$$

$$\omega \sin\lambda = \frac{h}{6} \sin\theta,$$

d'où

$$h^2 = \omega^2(1 + 35\,2\mathrm{in}^2\lambda), \qquad \operatorname{tang}\theta = 6\operatorname{tang}\lambda.$$

De plus, la valeur limite de φ est

$$\frac{h\cos\theta}{2k} \mathrm{L}6.$$