Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 381-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__381_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1930.

(1902, p. 288.)

x_1 étant une racine de l'équation

$$(1) \qquad x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$2 - x_1^2$ en est une autre. (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Si l'on pose $z = 2 - x^2$ ou $x = \pm(2 - z)^{\frac{1}{2}}$, la transformée en z s'annulera pour $z = 2 - x_1^2$.

La substitution donne sans ambiguïté l'égalité

$$[(2-z)^2 - 4(2-z) + 1]^2 = +\left[4(2-z)^{\frac{1}{2}} - (2-z)^{\frac{3}{2}}\right]^2,$$

et la réduction de cette formule conduit à l'équation

$$z^4 + z^3 - 4z^2 - 4z + 1 = 0,$$

identique à (1).

Autres solutions par MM. Frizac, N. Plakhowo et Ruïs y Cazas.

1939.

(1902, p. 479.)

Soient A *et* B *deux points fixes,* C *un point du segment* AB, Δ *une tangente commune aux cercles de diamètres* CA *et* CB, P *la projection de* C *sur* Δ :

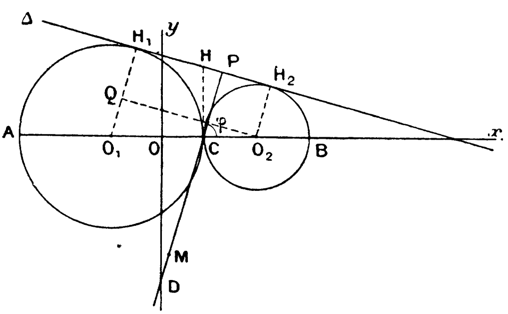
1° *La droite* CP *enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements dont deux sont en* A *et* B.

2° *Le point* P *décrit une développante de cette hypocycloïde.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

1° Soient O, O_1, O_2 les milieux de AB, AC, BC. Menons les



rayons de contact O_1H_1 et O_2H_2, et par O_2 menons O_2Q parallèle à Δ. Soit enfin D le point où CP rencontre la perpendiculaire Oy à AB. Les angles $\widehat{O_1O_2Q}$ et $\widehat{ODC}$ sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'autre part :

$$OC = \frac{AC - CB}{2} = \frac{AC}{2} - \frac{CB}{2} = O_1H_1 - O_2H_2 = O_1Q.$$

Les deux triangles rectangles OCD et O_1O_2Q sont donc égaux. Il s'ensuit que les hypoténuses sont égales. Donc :

$$CD = O_1O_2 = \frac{AB}{2} = \text{const.}$$

La droite CD de longueur constante, dont les extrémités se déplacent sur deux droites rectangulaires, enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. Les deux rebroussements situés sur AB sont bien A et B puisque

$$OA = OB = CD.$$

2° Soit M le point de contact de CP avec son enveloppe. Nous savons que l'arc BM d'hypocycloïde a pour valeur $\frac{3}{2}a\sin^2\varphi$ en posant $CD = a$ et appelant φ l'angle de CD avec AB.

Mais d'après la théorie du centre instantané ce contact M se trouve au pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du rectangle de côtés contigus OC, OD opposé à O sur CD. On voit donc que

$$MC = a\sin^2\varphi.$$

Menons CH tangente commune en C; nous avons

$$CH = \frac{H_1H_2}{2} = \frac{O_2Q}{2} = \frac{a}{2}\sin\varphi$$

et

$$CP = CH\sin\varphi = \frac{a}{2}\sin^2\varphi.$$

Par suite :

$$MP = MC + CP = a\sin^2\varphi + \frac{a}{2}\sin^2\varphi = \frac{3}{2}a\sin^2\varphi = \text{arc}\,BM,$$

MP étant égal à l'arc BM, le point P décrit une développante de l'hypocycloïde.

Autre solution par M. AUDIBERT.

1984.

(1903, p. 528.)

On donne un cercle de centre O *et un point* A. *Soient* M *un point du plan et* B *un des points de rencontre de* OM *avec le cercle. Le lieu des points* M *tels que* $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{\text{OA}}{\text{OB}}$ *est un limaçon de Pascal.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Lez.

On voit facilement que le lieu des points M est une conchoïde de cercle ou un limaçon de Pascal, suivant que le point A est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle O.

En effet, prenant pour axe des X la droite OA et pour axe des Y une perpendiculaire passant par le centre O, si $\text{OA} = d$, $\text{OB} = r$, on a

$$\text{OM} = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \text{MB} = \text{OM} \pm r = \sqrt{x^2+y^2} \pm r$$

et

$$\text{AM} = \sqrt{y^2+(d-x)^2};$$

par suite

$$\frac{\sqrt{y^2+(d-x)^2}}{\sqrt{x^2+y^2} \pm r} = \frac{d}{r}.$$

Réduisant, on trouve pour le lieu des points M

$$(r^2-d^2)(x^2+y^2) - 2\,dr^2 x = \pm 2\,d^2 r\sqrt{x^2+y^2}$$

ou

$$\left(x^2+y^2 - \frac{2\,dr^2 x}{r^2-d^2}\right)^2 = \frac{4\,d^4 r^2}{(r^2-d^2)^2}(x^2+y^2).$$

Or cette équation est celle d'une conchoïde

$$(x^2+y^2-bx)^2 = a^2(x^2+y^2),$$

dans laquelle on a

$$b = \frac{2\,dr^2}{r^2-d^2}, \qquad a = \frac{2\,d^2 r}{r^2-d^2}.$$

Autre solution par M. H. Couvert.