

JEAN SERVAIS

**Concours d'admission à l'École normale
supérieure. Composition de mathématiques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 314-325

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_314_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.**

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. On donne deux axes de coordonnées rectangulaires OX, OY et, sur la partie positive de l'axe des x , un point A , d'abscisse c .

Appelons en général parabole (P) une parabole qui passe par le point A et dont la directrice coïncide avec l'axe des y , F le foyer de cette parabole, α, β les coordonnées de ce foyer.

1° Soit B un point d'une parabole (P) , soit K la projection de ce point sur la directrice, soit S l'aire du triangle OFK ; montrer que l'on a

$$\frac{OF^2 \cdot OK}{OA} = \frac{KF^2 \cdot OK}{KB} = 4S.$$

2° Au point B de la parabole (P) on fait correspondre le point M dont les coordonnées u, v sont données par les formules

$$(1) \quad u = \frac{KF}{OK}, \quad v = \frac{OF}{OK};$$

les seconds membres sont pris en valeur absolue, en sorte que les nombres u, v sont positifs. Quand on se donne la parabole (P) et le point B sur cette parabole, le point M est déterminé sans ambiguïté. Si l'on se donne un point B du plan, il passe en général deux paraboles (P) par ce point. On appellera PREMIÈRE PARABOLE relative au point B celle des deux dont le foyer est le plus éloigné de la directrice. Soit F_1 ce

foyer; soit F_2 le foyer de la seconde parabole. Au point B correspondent alors deux points M_1, M_2 , par les relations (1), où l'on remplacera successivement F par F_1 et par F_2 .

Connaissant les coordonnées x, y du point B, on demande de calculer les coordonnées des points M_1, M_2 . Quelles sont les positions limites de ces points lorsque le point B s'approche du point B_0 situé sur la partie positive de l'axe des x ? Quels sont les lieux décrits par ces points limites quand l'abscisse de B_0 varie?

3° Inversement, le point M étant donné par ses coordonnées u, v , on demande de déterminer les coordonnées x, y du point B auquel il correspond en vertu des relations (1), ainsi que les coordonnées α, β du foyer F, qui figure dans ces relations, de la parabole (P) sur laquelle le point B doit être situé.

Construire géométriquement le point F et le point B, connaissant le point M et l'unité de longueur.

4° Le problème précédent admet deux solutions. Dans quelle région du plan le point M doit-il être situé pour que ces solutions soient réelles? Dans quelle région doit-il être situé pour que la parabole (P), dont on a déterminé le foyer, soit la première parabole relative au point B?

II. 1° Considérant une parabole (P), de foyer α, β , on suppose qu'un arc quelconque de cette parabole est pesant : la densité en chaque point est égale à la racine carrée de l'abscisse x de ce point, en sorte que le poids de l'élément d'arc ds soit $\sqrt{x} ds$. Montrer que, dans ces conditions, le poids d'un arc AB de la parabole est égal au produit par $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ de l'aire comprise entre la courbe, la directrice et les deux

droites OA, KB. (K est, comme plus haut, la projection de B sur la directrice.)

2° On suppose que les deux droites OA, KB soient aussi pesantes; la densité en chacun de leurs points est encore égale à la racine carrée de l'abscisse de ce point. Étudier, quand le point B décrit la parabole (P), comment varie la différence entre le poids de l'arc AB et la somme des poids des droites OA, KB. Montrer que, sur chacun des arcs indéfinis de la parabole qui partent du point A, il y a un point B, et un seul, pour lequel cette différence est nulle.

3° Le point B étant ainsi déterminé sur la parabole (P), soit M le point qui lui correspond par les relations (1); montrer que, lorsque la parabole (P) varie, le point M reste sur une conique, qui fait partie de la courbe du troisième degré définie par l'équation

$$2u^3 + 2v^3 - 3u^2 - 3v^2 + 1 = 0.$$

N. B. — Les poids dont il est question plus haut sont POSITIFS.

I. Pour démontrer la première Partie, il suffit de prouver que l'on a pour un point quelconque B de la parabole

$$(1) \quad \frac{\overline{KF}^2}{KB} = 2FH,$$

H étant le pied de la perpendiculaire abaissée (fig. 1) de F sur Oy.

Or, l'équation de la parabole étant

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = x^2,$$

on en tire

$$\frac{\alpha^2 + (y - \beta)^2}{x} = 2\alpha,$$

ce qui exprime la propriété précédente.

Remarquons de suite que α et x seront toujours positifs, seuls y et β pourront être négatifs.

De la relation (1) on tire

$$KF = \sqrt{2\alpha x},$$

et, en plaçant B en A, on en conclut

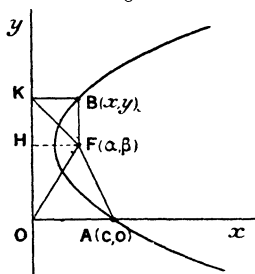
$$OF = \sqrt{2\alpha c};$$

on a, par suite,

$$(2) \quad u = \frac{\sqrt{2\alpha x}}{|y|}, \quad v = \frac{\sqrt{2\alpha c}}{|y|}.$$

Pour avoir les coordonnées des points M_1 et M_2 il

Fig. 1.



suffit de calculer les valeurs de α pour F_1 et F_2 . Or, on a, en exprimant que A et B sont sur la parabole,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (y - \beta)^2 &= 2\alpha x, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 2c\alpha. \end{aligned}$$

En retranchant, on a une équation de premier degré en β qui donne

$$(3) \quad \beta = \frac{y^2 - 2\alpha(x - c)}{2y}.$$

Cette valeur de β , portée dans l'une des deux relations précédentes, donne l'équation

$$(4) \quad 4\alpha^2[y^2 + (x - c)^2] - 4\alpha y^2(x + c) + y^4 = 0,$$

qui donne les valeurs de α :

$$(5) \quad \alpha = y^2 \frac{x + c \pm \sqrt{4cx - y^2}}{2[y^2 + (x - c)^2]}.$$

En prenant le signe $+$ on a le point F_1 et, en prenant le signe $-$ devant le radical, on a F_2 . Il suffit de porter ces valeurs de α dans les formules (2) pour avoir les coordonnées de M_1 et M_2 .

Lorsque B tend vers un point B_0 de Ox , α et y tendent tous deux vers zéro et, pour avoir les limites de u et v , il faut chercher la limite du rapport $\frac{\sqrt{\alpha}}{|y|}$. Or, d'après la formule (5), on a

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{|y|} = \sqrt{\frac{x + c \pm \sqrt{4cx - y^2}}{y^2 + (x - c)^2}}.$$

Lorsque y tend vers zéro et x vers une valeur positive x_0 , on a

$$\lim \frac{\sqrt{\alpha}}{|y|} = \sqrt{\frac{x_0 + c \pm 2\sqrt{cx_0}}{(x_0 - c)^2}} = \sqrt{\frac{(x_0^{\frac{1}{2}} \pm c^{\frac{1}{2}})^2}{(x_0 - c)^2}};$$

on en conclut

$$\lim \frac{\sqrt{\alpha}}{|y|} = \frac{1}{|x_0^{\frac{1}{2}} \mp c^{\frac{1}{2}}|}.$$

On aura donc, pour les coordonnées de M_1 ,

$$u_1 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{|x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}|}, \quad v_1 = \frac{1}{|x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}|}$$

et, pour celles de M_2 ,

$$u_2 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}}, \quad v_2 = \frac{1}{x_0^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}}.$$

Les lieux des points M_1 et M_2 sont manifestement des segments de droites.

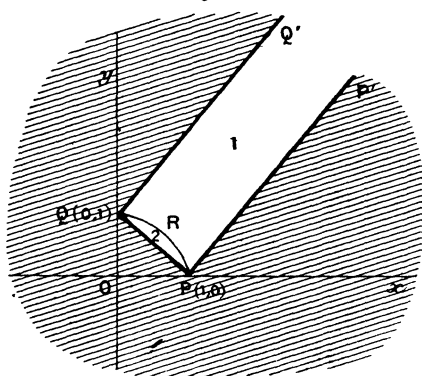
Quand x_0 varie de 0 à c , on a

$$u_1 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}}}, \quad v_1 = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}}},$$

et le point M_1 décrit la demi-droite PP' (*fig. 2*) d'équation

$$u - v - 1 = 0.$$

Fig. 2.



Lorsque x_0 varie de c à $+\infty$, on a

$$u_1 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}}, \quad v_1 = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}},$$

et le point M_1 décrit la demi-droite QQ' d'équation

$$u - v + 1 = 0.$$

Enfin, lorsque x_0 varie de 0 à $+\infty$, le point M_2 décrit le segment de droite PQ d'équation

$$u + v - 1 = 0.$$

Pour avoir les coordonnées de B connaissant u, v , on tire des équations (2)

$$2\alpha x = u^2 y^2, \quad 2cx = v^2 y^2,$$

ce qui donne, en divisant,

$$x = \frac{u^2 c}{v^2}.$$

En multipliant et ajoutant on a

$$4x^2 cx = u^2 v^2 y^4, \quad 2x(x+c) = (u^2 + v^2) y^4,$$

et, en portant ces valeurs de α^2, α et x dans l'équation (4), on obtient une équation du second degré en y .

Mais on peut obtenir ces valeurs de x et y beaucoup plus élégamment au moyen des formules démontrées. Les égalités

$$\frac{KF}{u} = \frac{OF}{c} = \frac{Ok}{1} = |y|$$

prouvent que le triangle OFK est semblable au triangle de côtés $u, c, 1$ dans le rapport de similitude $|y|$. La surface S de ce triangle est donc égale à celle du triangle $u, v, 1$ multipliée par y^2 ; on a donc

$$4S = y^2 \sqrt{(u+v+1)(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1)}.$$

Les égalités

$$\frac{\overline{OF}^2 \cdot OK}{OA} = \frac{\overline{KF}^2 \cdot OK}{KB} = 4S$$

s'écrivent alors, puisque

$$OF = v \cdot Ok = v |y|,$$

$$KF = u \cdot Ok = u |y|,$$

$$\begin{aligned} \frac{v^2 |y|^3}{c} &= \frac{u^2 |y|^3}{x} \\ &= y^2 \sqrt{(u+v+1)(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1)}. \end{aligned}$$

On en tire

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{u^2 c}{v^2}, \\ y = \pm \frac{c}{v^2} \sqrt{(u+v+1)(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1)}. \end{cases}$$

Connaissant x et y on a

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{v^2 y^2}{2c}, \\ \beta = \frac{y}{2} (1 + v^2 - u^2); \end{cases}$$

à chaque point M correspondent donc deux paraboles symétriques par rapport à Ox .

Pour que le point B soit réel il faut et il suffit que la quantité sous le radical de y soit positive. Ceci exprime que, avec les trois longueurs u , v , 1 , on peut construire un triangle. Comme u et v sont positifs, il suffit que l'on ait

$$(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1) > 0,$$

d'où il résulte que le point de coordonnées u , v (positives) se trouve à l'intérieur du rectangle indéfini $P'PQQ'$ (*fig. 2*) (c'est-à-dire dans la région non ombrée).

Étant donné un point M dans cette région, pour construire géométriquement le point B , nous porterons sur Oy (*fig. 3*) une longueur Ok égale à l'unité de longueur et nous construirons le triangle Ofk de côtés

$$Ok = 1, \quad Of = v, \quad kf = u.$$

Ce triangle est semblable au triangle OFK . On obtient F en abaissant de A la perpendiculaire AS sur Of et prenant

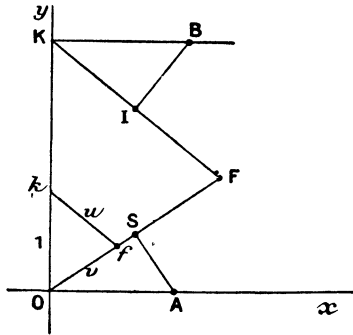
$$OF = 2 OS.$$

En menant par F la parallèle FK à fk on a le

point K, et enfin B est à l'intersection de la parallèle KB à Ox et de la perpendiculaire au milieu I de KF.

Pour distinguer les paraboles remarquons que les deux paraboles sont confondues lorsque les valeurs de α

Fig. 3.



fournies par la formule (5) sont égales, c'est-à-dire lorsque

$$y^2 = 4cx.$$

Ceci donne

$$(u^2 + v^2 - 1)^2 = 0.$$

La courbe de séparation est donc le cercle

$$u^2 + v^2 = 1,$$

dont il ne faut évidemment prendre que l'arc PRQ (*fig. 2*) situé dans l'angle xOy . Cet arc PRQ partage le rectangle $P'PQQ'$ en deux régions, et c'est évidemment la région 1 ($P'PRQQ'$), attenante aux côtés PP' et QQ' positions limites de M_1 , qui correspond à la première parabole.

II. L'équation de la parabole étant

$$(y - \beta)^2 + \alpha^2 = 2\alpha x,$$

(323)

on a, en différentiant,

$$(y - \beta) dy = \alpha dx$$

et, par suite,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{(y - \beta)^2 + \alpha^2}{\alpha^2} dy^2,$$

$$ds = \frac{2x}{\alpha} dy,$$

$$\sqrt{x} ds = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} x dy,$$

égalité qui prouve que le poids $\int_0^y \sqrt{x} ds$ de l'arc AB est égal à l'aire $\int_0^y x dy$ multipliée par $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$.

Remarquons de suite que, lorsque y sera négatif, cette expression donnera une valeur négative pour le poids.

Les poids de OA et KB sont respectivement

$$\frac{2}{3} c^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}.$$

La différence entre le poids de l'arc AB et la somme des poids des droites OA et BK est donc : si $y > 0$,

$$(8) \quad z = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_0^y x dy - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} c^{\frac{3}{2}}$$

et, si $y < 0$,

$$(9) \quad z = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_0^y x dy - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} c^{\frac{3}{2}}.$$

Pour étudier la variation de z prenons-en la dérivée

$$\frac{dz}{dy} = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha}} x - x^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{dy},$$

or

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - \beta}{\alpha} = \pm \frac{\sqrt{2\alpha x - \alpha^2}}{\alpha};$$

on a donc

$$\frac{dz}{dy} = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha}} x \mp \sqrt{\frac{x(2x - \alpha)}{\alpha}}$$

ou

$$\frac{dz}{dy} = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha}} x \left(1 \pm \sqrt{\frac{x - \frac{\alpha}{2}}{x}} \right).$$

Sous cette forme on voit que, dans tous les cas, $\frac{dz}{dy}$ est du signe de y . La fonction z est donc *croissante en valeur absolue* lorsque y croît à partir de zéro.

Lorsque y est positif, on a

$$z = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2} (y - \beta) + \frac{(y - \beta)^3}{6\alpha} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^3}{6\alpha} \right) - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} c^{\frac{3}{2}}.$$

Posons $y - \beta = y'$ et il vient, en développant

$$x^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{y'^2 + \alpha^2}{2\alpha} \right)^{\frac{3}{2}}$$

suivant les puissances décroissantes de y' ,

$$z = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}} (\alpha^2 y' + \dots).$$

Ceci prouve que quand y croît indéfiniment z croît indéfiniment.

Donc, quand y croît de 0 à $+\infty$, z croît de $-\frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}}$ à $+\infty$ et, par suite, z s'annule une fois et une seule fois sur la branche de la parabole située au-dessus de Ox .

Pour la branche située au-dessous de Ox on a

$$z = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{2} (y - \beta) + \frac{(y - \beta)^3}{6\alpha} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^3}{6\alpha} \right) - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} c^{\frac{3}{2}}.$$

En posant $y - \beta = -y'$ et faisant croître y' par

valeurs positives, on verrait de même que, quand y décroît de 0 à $-\infty$, z croît de $-\frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}}$ à $+\infty$ et, par suite, s'annule encore une fois et une seule.

Si, dans l'expression de z développée, on remplace α , β , x par leurs valeurs fournies par les formules (6) et (7), on trouve, dans les deux cas,

$$z = \frac{-c^{\frac{3}{2}}}{3v^3}(2u^3 + 2v^3 - 3u^2 - 3v^2 + 1)$$

ou

$$z = \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3v^3}(1 - u - v)(2u^2 + 2v^2 - 2uv - u - v - 1).$$

Les valeurs de u et v , pour lesquelles on a $z = 0$, satisfont donc soit à

$$(10) \quad 1 - u - v = 0,$$

soit à

$$(11) \quad 2u^2 + 2v^2 - 2uv - u - v - 1 = 0.$$

La droite (10) n'est autre chose que le segment PQ (*fig. 2*) qui correspond au cas où le point B est sur Ox. Dans ce cas, en effet, la parabole est une droite double, l'arc de parabole se confond avec les deux segments OA et KB, et l'on a évidemment $z = 0$.

Si l'on écarte ce cas singulier il reste la conique représentée par l'équation (11). C'est une ellipse qui passe aux points P et Q (*fig. 2*). Il ne faudra évidemment prendre que l'arc PQ de cette ellipse.

Cet arc d'ellipse est tout entier dans la région 1 (*fig. 2*). Si donc on prend un point M sur cet arc, c'est la première parabole pour laquelle z est nul.