NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1904. Composition de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 257-264

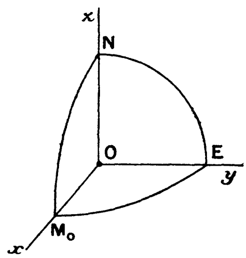
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__257_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1904. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

PREMIÈRE QUESTION.

On donne une sphère de rayon r, *de centre* O *origine de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *Un point de cette sphère, primitivement situé en* M_0 *sur* Ox, *se déplace uniformément sur le grand cercle* M_0N, *de* M_0



vers N, *avec une vitesse angulaire* ω. *En même temps le plan primitivement situé en* OM_0N *tourne uniformément autour de* ON, *de* OM_0N *vers* OEN, *avec la même vitesse angulaire. Par suite de ce double mouvement, le point mobile considéré, au bout du temps* t, *occupera une certaine position* M.

I. *Déterminer en fonction de* t *les coordonnées du point* M, *les composantes de sa vitesse* v, *et celles de son accélération* w *suivant les directions des axes. Déter-*

miner aussi la grandeur de la vitesse, celle de l'accélération tangentielle w_t, et de l'accélération normale w_n.

II. *Construire les projections sur les trois plans coordonnés de la trajectoire de* M.

III. 1° *L'accélération totale de* M *étant représentée par une droite* MW, *et cette droite venant percer le plan des xy en* P, *déterminer dans ce plan le mouvement du point* P.

2° *Démontrer que la droite* MW *rencontre une droite fixe.*

1. Au bout du temps t, le point M se trouve à la cote

$$z = r \sin \omega t,$$

par suite, sur un petit cercle, parallèle au plan Oxy, de rayon $r \cos \omega t$. D'ailleurs le plan zOM fait aussi avec zOx un angle égal à ωt. Les deux autres coordonnées sont, dès lors,

$$x = r \cos^2 \omega t, \qquad y = r \cos \omega t \sin \omega t.$$

On peut donc écrire

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r \cos^2 \omega t, \\ y = r \sin \omega t \cos \omega t, \\ z = r \sin \omega t, \end{cases}$$

ou encore

$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{r(1 + \cos 2\omega t)}{2}, \\ y = \dfrac{r \sin 2\omega t}{2}, \\ z = r \sin \omega t. \end{cases}$$

Il vient maintenant, par dérivation,

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = - r\omega \sin 2\omega t, \\ y' = r\omega \cos 2\omega t, \\ z' = r\omega \cos \omega t; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} x'' = - 2r\omega^2 \cos 2\omega t, \\ y'' = - 2r\omega^2 \sin 2\omega t, \\ z'' = - r\omega^2 \sin \omega t; \end{cases}$$

d'où, pour la vitesse,

$$(4)\qquad v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r\omega\sqrt{1 + \cos^2\omega t},$$

et pour l'accélération totale

$$(5)\qquad w = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = r w^2 \sqrt{4 + \sin^2\omega t}.$$

On a ensuite, pour l'accélération tangentielle,

$$(6)\qquad w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-r\omega^2 \sin\omega t \cos\omega t}{\sqrt{1 + \cos^2\omega t}},$$

et pour l'accélération normale,

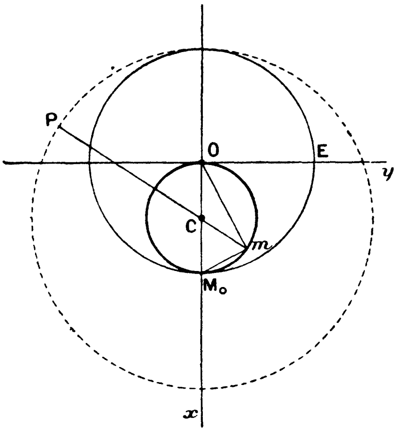
$$(7)\qquad \begin{cases} w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} \\ = r\omega^2\sqrt{4 + \sin^2\omega t - \dfrac{\sin^2\omega t \cos^2\omega t}{1 + \cos^2\omega t}} \\ = r\omega^2\sqrt{\dfrac{5 + 3\cos^2\omega t}{1 + \cos^2\omega t}}. \end{cases}$$

II. L'élimination de ωt, entre les équations (1) ou (1 *bis*), prises deux à deux, donne immédiatement, pour les projections de la trajectoire sur les plans coordonnés,

$$(8)\qquad x^2 + y^2 = rx,$$

cercle décrit sur OM_0 comme diamètre (*fig.* 1),

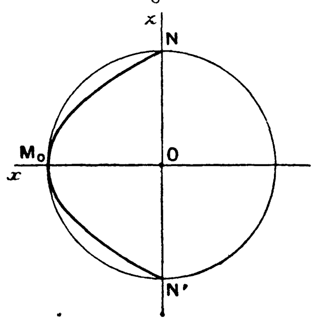
Fig. 1.



(9) $$z^2 + rx = r^2,$$

parabole de sommet M_0 et d'axe OM_0 (*fig.* 2), passant

Fig. 2.

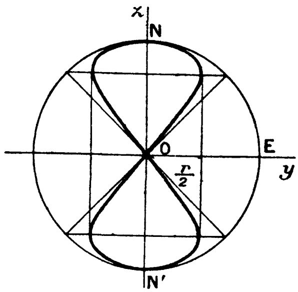


par les extrémités du diamètre de la sphère dirigé suivant Oz, ayant un paramètre égal à $\frac{r}{2}$, et dont la partie utile est limitée à Oz,

(10) $$z^4 + r^2y^2 = r^2z^2,$$

quartique en forme de huit (*fig.* 3) (dite parfois *lemniscate de Gerono*), symétrique par rapport à Oy et Oz, ayant pour tangentes en son point double O les

Fig. 3



bissectrices des axes, et coupant Oz aux mêmes points que la parabole.

Remarques géométriques. — 1° Si m est la projection de M sur le plan Oxy (*fig.* 1), les triangles OMm et OM_0m, qui ont en commun le côté Om, sont égaux, puisque $OM = OM_0$, et que les angles MOm et M_0Om sont tous deux égaux à ωt.

Il en résulte que l'angle OmM_0 est droit et, par suite, que le lieu de m est le cercle décrit sur OM_0 comme diamètre.

En outre, si C est le centre de ce cercle, milieu de OM_0, l'angle au centre M_0CM étant double de M_0Om, est égal à $2\omega t$, ce qui montre que le point m décrit uniformément le cercle OM_0, dans le sens direct, avec la vitesse angulaire 2ω.

2° Si M' est la projection de M sur le plan Oxz, m' celle de M' sur Ox, on a

$$M'm' = Mm = M_0m.$$

Or, dans le cercle OmM_0,

$$\overline{M_0 m}^2 = r.M_0 m'.$$

Donc,

$$\overline{M'm'}^2 = r.M_0 m',$$

ce qui démontre que le lieu de M′ est la parabole trouvée ci-dessus analytiquement.

III. Les équations de la droite MP suivant laquelle est dirigée l'accélération sont

$$\frac{X - x}{x''} = \frac{Y - y}{y''} = \frac{Z - z}{z''}.$$

Cette droite coupe donc le plan Oxy au point P de coordonnées

$$X = x - \frac{zx''}{z''}, \qquad Y = y - \frac{zy''}{z''},$$

ou, d'après (1 *bis*),

$$X = \frac{r(1 - 3\cos 2\omega t)}{2}, \qquad Y = -\frac{3r\sin 2\omega t}{2},$$

qu'on peut écrire

$$X = 2r - 3x, \qquad Y = -3y.$$

Portons l'origine au point C milieu de OM_0, en changeant x en $x_1 + \frac{r}{2}$.

Nous avons

$$X_1 = -3x_1, \qquad Y = -3y.$$

Donc, le point P se trouve sur la droite Cm (*fig.* 1) à une distance, au delà de C, triple de Cm. Par suite, *le point* P *décrit un cercle concentrique à celui que décrit m et de rayon triple;* et, comme nous venons de voir que la droite Cm (ou CP) tourne autour de C dans le sens direct avec une vitesse angulaire 2ω, *le point* P *décrit ce cercle uniformément, et dans le sens direct.*

On peut remarquer que les cercles (m) et (P) sont les cercles de centre C tangents au cercle d'équateur de la sphère.

Puisque la droite mP passe par C, *la droite* MP, dont elle est la projection, *rencontre constamment la parallèle à* Oz *menée par* C.

D'une manière générale, il est d'ailleurs évident que si le mouvement d'un point M se projette sur un plan suivant un mouvement circulaire uniforme de centre C, l'accélération du point M rencontre la perpendiculaire au plan, menée par C. En effet, la projection de l'accélération sur ce plan, qui est l'accélération du mouvement projeté, passe par C.

SECONDE QUESTION.

Déterminer à 0,001 *près la racine positive de l'équation* $x^3 + x^2 - 27,48 = 0$, *en appliquant la méthode d'approximation de Newton.*

On a

$$f(x) = x^3 + x^2 - 27,48,$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x,$$
$$f''(x) = 6x + 2.$$

Comme on a $f(2,7) < 0$, $f(2,8) > 0$, on voit que

$$2,7 < x < 2,8.$$

En outre $f(2,8)$ étant positif comme $f''(2,8)$, on appliquera la méthode à partir de 2,8.

Enfin le maximum M de $f''(x)$ dans l'intervalle considéré est

$$M = f''(2,8) = 18,8,$$

et l'on a

$$\frac{M}{2f'(2,8)} = \frac{18,8}{2 \times 29,12},$$

qui est < 1. Il en résulte, puisque l'intervalle

$$2,8 - 2,7 = 0,1,$$

qu'il suffira de deux applications de la méthode à partir de $2,8$ pour avoir l'approximation de $0,001$. D'où le calcul :

Première approximation : $x_0 = 2,8$.

$$\begin{array}{lll} f(x_0) = 2,312, & & \\ f'(x_0) = 29,12, & \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,0794, & x_1 = 2,8 - 0,0794 \\ f''(x_0) = 18,8, & & = 2,7206. \end{array}$$

Seconde approximation : $x_1 = 2,7206$.

$$\begin{array}{lll} f(x_1) = 0,0585, & & \\ f'(x_1) = 27,646, & \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,0021, & x_2 = 2,7206 - 0,0021 \\ f''(x_1) = 18,3236, & & = 2,7185. \end{array}$$

Donc, à $0,001$ près, $x = 2,718$ (nombre e avec 3 décimales).