

P. ZERVOS

**Développement d'une fonction en série
ordonnée suivant les puissances entières
et positives d'une autre fonction**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 200-205

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_200_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D1b]

**DÉVELOPPMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE ORDONNÉE
SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES ET POSITIVES
D'UNE AUTRE FONCTION;**

PAR M. P. ZERVOS.

I. Soit par une transformation conforme de l'intégrale de Cauchy, soit directement on peut démontrer la formule

$$\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz = 2\pi i \frac{f(x)}{\sigma'(x)},$$

où nous supposons : 1° que la fonction $f(z)$ est holomorphe comme la fonction $\sigma(z)$ (la dernière prenant une détermination) à l'intérieur du domaine limité par un contour C ; 2° qu'il n'y ait pas de racine de $\sigma'(x)$

dans le même domaine; 3° que la fonction $\sigma(z) - \sigma(x)$ et le contour C soient tels qu'un point quelconque x_i du domaine soit la seule racine de la fonction $\sigma(z) - \sigma(x_i)$ dans ce domaine; une telle fonction, par exemple, est la fonction $z^2 - x^2$ à l'intérieur d'une aire dont le contour ne coupe pas un des deux axes.

II. Démonstration directe de la formule

$$\int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz = 2\pi i \frac{f(x)}{\sigma'(x)}.$$

Décrivons de x comme centre un cercle γ de rayon ρ , intérieur à l'aire G . Nous aurons

$$\int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz,$$

où le rayon ρ peut être aussi petit qu'on veut. Nous développons les fonctions $f(z)$ et $\sigma(z)$ au voisinage du point x . Alors nous aurons

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz \\ &= \int_\gamma \frac{f(x) + \rho e^{\theta i} f'(x) + \frac{\rho^2 e^{2\theta i}}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots}{\rho e^{\theta i} \sigma'(x) + \frac{\rho^2 e^{2\theta i}}{1 \cdot 2} \sigma''(x) + \dots} i \rho e^{\theta i} d\theta \end{aligned}$$

ou, séparant la seconde,

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & \int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz \\ &= \int_\gamma \frac{f(x)}{\sigma'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1 \cdot 2} \sigma''(x) + \dots} i d\theta \\ &+ \int_\gamma \frac{\rho e^{\theta i} f'(x) + \frac{\rho^2 e^{2\theta i}}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots}{\sigma'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1 \cdot 2} \sigma''(x) + \dots} i d\theta. \end{aligned} \right.$$

De celles-ci la seconde est nulle parce que nous voyons que, d'après nos hypothèses, il est facile de démontrer que l'on peut trouver un nombre positif M tel que l'inégalité

$$\left| e^{\theta i} \left(f'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1.2} f''(x) + \dots \right) \right| < M$$

soit vraie pour tout point de la circonférence γ , et aussi un nombre positif m tel que l'inégalité

$$\sigma'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1.2} \sigma''(x) + \dots > m$$

soit vraie pour les mêmes points, en rappelant que nous avons supposé $\sigma'(x) \neq 0$ pour tout point du domaine G .

Ainsi l'intégrale considérée est moindre que $\rho \geq 2\pi i \frac{M}{m}$.

Donc la seconde intégrale du second membre de l'égalité (1) est rigoureusement nulle, ρ étant aussi petit que l'on veut.

Pour la première, je remarque que l'on a

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \frac{f(x)}{\sigma'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1.2} \sigma''(x) + \dots} d\theta - \int_{\gamma} \frac{f(x)}{\sigma'(x)} d\theta \\ &= -\rho \int_{\gamma} \frac{e^{\theta i} f(x) \left(\frac{\sigma''(x)}{1.2} + \frac{\sigma'''(x)}{1.2.3} \rho e^{\theta i} + \dots \right)}{\sigma'(x) \left(\sigma'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1.2} \sigma''(x) + \dots \right)} \end{aligned}$$

En se servant de la même manière que précédemment, nous pouvons voir que le second membre est nul. Par conséquent l'égalité (1) devient

$$\int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(x)}{\sigma'(x)} i d\theta = 2\pi i \frac{f(x)}{\sigma'(x)}.$$

III. Nous pouvons, par cette formule, calculer immé-

diatement plusieurs intégrales; par exemple .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx \quad (m > 0, a > 0).$$

Pour cela, il suffit de calculer l'intégrale

$$\int \frac{z e^{mzi}}{z^2 + a^2} dz,$$

effectuée le long du périmètre d'un demi-cercle tracé dans le demi-plan. Nous l'écrivons sous la forme

$$\int \frac{z e^{mzi}}{z^2 - (ai)^2} dz.$$

Le demi-cercle considéré est une aire dans laquelle le facteur $(z + ai)$ ne s'annule jamais.

Nous pouvons donc appliquer la formule précédente et nous aurons

$$\int_C \frac{z e^{mzi}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \frac{ai e^{-ma}}{2ai} = i\pi e^{-ma}.$$

IV. Une application de cette formule, que je crois intéressante, est le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances positives d'une autre fonction. Pour cela, prenons l'identité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(z) - \sigma(x)} &= \frac{1}{\sigma(z)} + \frac{\sigma(x)}{[\sigma(z)]^2} + \dots \\ &+ \frac{[\sigma(x)]^n}{[\sigma(z)]^{n+1}} + \left(\frac{\sigma(x)}{\sigma(z)}\right)^{n+1} \frac{1}{\sigma(z) - \sigma(x)}. \end{aligned}$$

Alors la formule (1) devient

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{\sigma'(x)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)} dz + \frac{\sigma(x)}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^2} dz + \dots \\ &+ \frac{[\sigma(x)]^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^{n+1}} dz \\ &+ \frac{[\sigma(x)]^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z) - \sigma(x)] [\sigma(z)]^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

Si donc nous prenons nos hypothèses telles que le terme complémentaire

$$\frac{[\sigma(x)]^{n+1}}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{[\sigma(z) - \sigma(x)] [\sigma(z)]^{n+1}} dz$$

tend vers zéro pour n infini, nous aurons un développement de $\frac{f(x)}{\sigma'(x)}$ en une série ordonnée suivant les puissances positives d'une autre fonction $\sigma(x)$.

D'autre part

$$\begin{aligned} & \frac{f(x + \Delta x)}{\sigma(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{\sigma(x)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left(\frac{1}{\sigma(z) - \sigma(x + \Delta x)} - \frac{1}{\sigma(z) - \sigma(x)} \right) dz. \end{aligned}$$

Si l'on divise par Δx et qu'on prenne la limite pour $\Delta x = 0$, nous aurons

$$(2) \quad \left(\frac{f(x)}{\sigma'(x)} \right)' = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma'(x) f(z)}{[\sigma(z) - \sigma(x)]^2} dz.$$

Supposons qu'il y ait une racine de la fonction $\sigma(x)$ dans le domaine C. Soit

$$(a) \quad \sigma(a) = 0.$$

Alors on peut déduire de la formule (2) la formule

$$(3) \quad \frac{\sigma'(a) f'(a) - f(a) \sigma''(a)}{[\sigma'(a)]^3} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^2} dz.$$

De même de la formule (2) nous déduisons avec l'hypothèse (a)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{f(x)}{\sigma'(x)} \right)'_{\text{pour } x=a} \\ &= \frac{\sigma''(a)}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^2} dz + \frac{2[\sigma'(a)]^2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^3} dz; \end{aligned} \right.$$

d'où, si l'on considère l'égalité (3), nous déduirons la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^3} dz.$$

En continuant de la même manière on peut trouver l'intégrale $\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^n} dz$ exprimée en fonction des valeurs

$$\begin{aligned} \sigma'(a), \quad \dots, \quad \sigma^{n-1}(a), \\ f'(a), \quad \dots, \quad f^{n-1}(a), \end{aligned}$$

et alors la fonction $\frac{f(x)}{\sigma'(x)}$ se développe sous la forme

$$A_0 + A_1 \sigma(x) + A_2 [\sigma(x)]^2 + \dots + A_m [\sigma(x)]^m + \dots$$

Quant à cette dernière application, nous pouvons remarquer qu'il est facile de voir quelles sont les différences essentielles entre notre méthode pour la recherche des coefficients du développement et celles pour la série de Burmann.