NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Sur la dépression de l'horizon de la mer et le nivellement géodésique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 197-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__197_0>

[U10a]

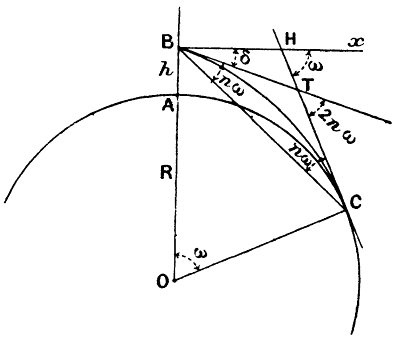
SUR LA DÉPRESSION DE L'HORIZON DE LA MER ET LE NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Voici un procédé direct, très élémentaire, pour obtenir la formule qui fait connaître la dépression de l'horizon de la mer lorsque l'on tient compte de la réfraction géodésique.

Le rayon lumineux issu de B (*fig.* 1) et tangent en C

Fig. 1.



à la sphère terrestre pouvant, comme l'a démontré l'expérience, être assimilé à un arc de cercle, et les tangentes en B et en C à cet arc faisant, avec la corde BC, des angles $n\omega$ proportionnels à l'angle ω des verticales en B et en C (loi de Biot), on voit immédiatement que

$$\widehat{CHx} = \omega \qquad \text{(côtés perpendiculaires à AOC)},$$

$$\widehat{BTH} = 2n\omega \qquad \text{(extérieur au triangle BCT)},$$

et, par suite, que la dépression δ de l'horizon est liée à ω par la formule

$$(1) \qquad \delta = \omega - 2n\omega = (1-2n)\omega.$$

On voit, en outre, que, dans le triangle OBC,

$$\widehat{OCB} = \frac{\pi}{2} - n\omega,$$

$$\widehat{OBC} = \frac{\pi}{2} - (\delta + n\omega) = \frac{\pi}{2} - (1-n)\omega.$$

Par suite, ce triangle OBC donne

$$\frac{R+h}{R} = \frac{\cos n\omega}{\cos(1-n)\omega},$$

ou, en négligeant dans le second membre les quantités du quatrième ordre,

$$1 + \frac{h}{R} = \frac{1 - \dfrac{n^2\omega^2}{2}}{1 - \dfrac{(1-n)^2\omega^2}{2}} = 1 + \frac{(1-n)^2 - n^2}{2}\omega^2$$

$$= 1 + \frac{1-2n}{2}\omega^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{R} = \frac{1-2n}{2}\omega^2.$$

Remplaçant, dans (1), ω par la valeur tirée de là, on a

$$(2) \qquad \delta = \sqrt{(1-2n)\frac{2h}{R}},$$

qui est bien la formule classique.

2. La même méthode s'applique aussi facilement à la détermination de la différence de niveau de deux points lorsque l'on tient compte de la réfraction géodésique.

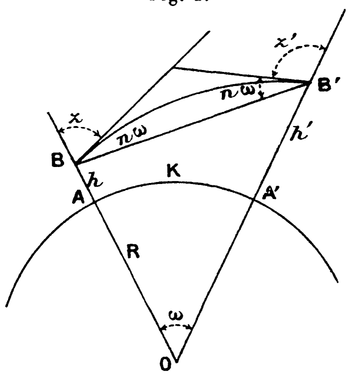
Les tangentes au rayon lumineux curviligne faisant encore en B et en B′ avec la corde BB′ (*fig.* 2) des angles égaux à $n\omega$, on a, dans le triangle OBB′,

$$\frac{R+h'}{R+h} = \frac{\sin(z+n\omega)}{\sin(z'+n\omega)}$$

ou

$$(3) \qquad \frac{h'-h}{R+h} = \frac{2\sin\dfrac{z-z'}{2}\cos\left(\dfrac{z+z'}{2}+n\omega\right)}{\sin(z'+n\omega)}.$$

Fig. 2.



Mais, la somme des angles extérieurs en B et B′ donne

$$z+z'+2n\omega = \pi+\omega,$$

d'où l'on déduit successivement

$$\frac{z+z'}{2}+n\omega = \frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2},$$

$$z'+n\omega = \pi - [z+(n-1)\omega],$$

et, par soustraction,

$$\frac{z-z'}{2} = -\frac{\pi}{2}+\left(z-\frac{1-2n}{2}\omega\right).$$

Portant ces valeurs dans (3), on a

$$\frac{h'-h}{R+h} = \frac{2\cos\left(z-\dfrac{1-2n}{2}\omega\right)\sin\dfrac{\omega}{2}}{\sin[z+(n-1)\omega]},$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$\frac{h' - h}{R + h} = \omega \frac{\cos z + \frac{1 - 2n}{2}\omega \sin z}{\sin z},$$

c'est-à-dire

$$h' - h = R\left(1 + \frac{h}{R}\right)\left(\omega \cot z + \frac{1 - 2n}{2}\omega^2\right).$$

Si l'on tient compte de la relation

$$\omega = \frac{K}{R},$$

et que l'on néglige encore les termes du second ordre, on a enfin

$$(4) \qquad h' - h = K \cot z + \frac{1 - 2n}{2}\frac{K^2}{R},$$

qui est la formule bien connue.