Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 187-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__187_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1755.

(1897, p. 52.)

Calculer les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} \cos[x(y-\alpha)]\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} \sin[x(y-\alpha)]\,dy,$$

où t désigne une constante POSITIVE *et où y et α sont des constantes* ARBITRAIRES. (C. BOURLET.)

SOLUTION

Par M. V. JAMET.

L'étude de ces deux intégrales se rattache à celle de l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty e^{-tx^2+\lambda x}\,dx,$$

où t désigne encore une constante positive, et λ une constante arbitraire, réelle ou imaginaire. Or la première question à résoudre est celle-ci; l'intégrale proposée a-t-elle un sens? En d'autres termes l'intégrale U, définie comme il suit :

$$U = \int_0^X e^{-tx^2+\lambda x}\,dx,$$

a-t-elle une limite finie, quand X augmente au delà de toute limite, en restant sans cesse réelle et positive? Or cette intégrale peut être transformée comme il suit :

$$U = e^{\frac{\lambda^2}{4t}} \int_0^X e^{-\left(\sqrt{t}x+\frac{\lambda^2}{2\sqrt{t}}\right)^2} dx;$$

et si l'on pose

$$\sqrt{t}x + \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}z,$$

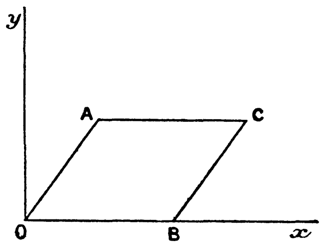
on trouve :

$$U = e^{+\frac{\lambda^2}{4t}} \int e^{-tz^2}\, dz,$$

en supposant que la variable z décrit un vecteur AC, parallèle à l'axe Ox, et de longueur X, issu du point A dont l'affixe est $\frac{\lambda}{2t}$. Mais l'intégrale

$$\int e^{-tz^2}\, dz,$$

calculée tout le long du contour du parallélogramme OBCA



est nulle, et nous aurons établi que l'intégrale proposée a une limite, savoir :

$$\lim \int_0^X e^{-tz^2}\, dz - \int_{OA} e^{-tz^2}\, dz,$$

si nous démontrons : 1° que le premier terme de cette dernière expression a une limite finie ; 2° que l'intégrale

$$\int_{BC} e^{-tz^2}\, dz$$

tend vers zéro, lorsque le segment OB, égal à X, est de plus en plus grand. Or :

1°

$$\int_0^X e^{-tz^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\frac{X}{\sqrt{t}}} e^{-y^2}\, dy,$$

en vertu de la transformation

$$z = \frac{y}{\sqrt{t}},$$

et l'on sait que, X croissant au delà de toute limite, l'intégrale écrite au second membre de cette égalité a pour limite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

2° L'équation de la droite BC est de la forme

$$x = X + \alpha y,$$

α désignant une constante; et si l'on désigne par h l'ordonnée commune aux deux points A, C, on trouve

$$\int_{BC} e^{-tz^2}\,dz = (\alpha + i)\int_0^h e^{-(X+\alpha y+iy)^2}\,dy$$
$$= (\alpha + i)\int_0^h e^{-[X^2+(\alpha^2-1)y^2+2\alpha Xy+2iy(X+y)]}\,dy.$$

Son module est donc inférieur à

$$\text{(1)}\qquad \sqrt{\alpha^2+1}\int_0^h e^{-[X^2+2\alpha yX+(\alpha^2-1)y^2]}\,dy.$$

Mais l'exposant de e qui figure sous le signe d'intégration est maximum ou minimum pour $y = -\frac{\alpha X}{\alpha^2-1}$, et nous pouvons supposer X assez grand pour que la valeur numérique du second membre de cette égalité ne soit pas comprise entre zéro et h. Donc, y variant de zéro à h, la fonction sous le signe $\int$ varie sans cesse dans le même sens, et l'expression (1) est comprise entre le plus grand et le plus petit des deux nombres

$$\frac{h\sqrt{\alpha^2+1}}{e^{X^2}}$$

et

$$\frac{h\sqrt{\alpha^2+1}}{e^{X^2+2\alpha hX+(\alpha^2-1)h^2}},$$

qui tendent vers zéro l'un et l'autre, quand X augmente au delà de toute limite; ce qui démontre la proposition énoncée.

Ceci suppose toutefois que α^2-1 n'est pas nul; si α^2-1 était nul, l'étude de l'expression (1) conduirait encore plus facilement à la même conclusion.

De tout ce qui précède, résulte l'égalité

$$U = \int_0^\infty e^{-tx^2+\lambda x}\,dx = e^{\frac{\lambda^2}{4t}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} - \int_{OA} e^{-tz^2}\,dz\right),$$

ou encore

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-tx^2+\lambda x}\,dx = e^{\frac{\lambda^2}{4t}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} - \int_0^{\frac{\lambda}{2t}} e^{-tz^2}\,dz\right).$$

Si maintenant nous faisons $y - \alpha = \beta$, nous voyons que la première des intégrales proposées par M. Bourlet, savoir

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos[x(y-\alpha)]\,dx,$$

est égale à

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-tx^2+i\beta x}\,dx + \int_0^\infty e^{-tx^2-i\beta x}\,dx\right)$$

et, d'après notre formule (2), à

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} - \int_0^{\frac{\beta i}{2t}} e^{-tz^2}\,dz - \int_0^{-\frac{\beta i}{2t}} e^{-tz^2}\,dz\right).$$

Mais, dans ces deux dernières intégrales, deux éléments répondant à deux valeurs de z égales et de signe contraire sont égaux et de signe contraire.

Donc la somme de ces deux intégrales est nulle.

Donc enfin

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos\beta t\,dt = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

La deuxième intégrale est égale

$$\frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty e^{-tx^2+i\beta x}\,dx - \int_0^\infty e^{-tx^2-i\beta x}\,dx\right),$$

et, toujours en vertu de la formule (2), à

$$\frac{i}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\int_0^{\frac{\beta i}{2t}} e^{-tx^2}\,dx.$$

Il nous reste à faire connaître un développement de cette fonction en série entière procédant suivant les puissances de β, et nous vérifierons ensuite que ce développement est valable pour toutes les valeurs possibles de β. A cet effet, posons

$$\mathrm{V} = \frac{i}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4t}} \int_0^{\frac{\beta i}{2t}} e^{-tx^2} dx.$$

Nous en concluons

$$(3) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{d\beta} = -\frac{\beta}{2t}\mathrm{V} - \frac{1}{4t},$$

et, en différentiant p fois de suite les deux membres de cette dernière équation,

$$\frac{d^{p+1}\mathrm{V}}{d\beta^{+1}} = -\frac{1}{2t}\left(\beta \frac{d^p \mathrm{V}}{d\beta^p} + p \frac{d^{p-1}\mathrm{V}}{d\beta^{p-1}}\right).$$

Si donc la fonction V est identique, pour les valeurs de β comprises dans un certain domaine de l'origine, à la somme d'une série de la forme

$$a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots + a_p\beta^p + \ldots,$$

il suffit de faire, dans l'égalité ci-dessus, $\beta = 0$, et de diviser ses deux membres par $\overline{p+1}\,!$ pour trouver immédiatement

$$a_{p+1} = -\frac{1}{2t}\frac{a_{p-1}}{p+1}.$$

Or la fonction considérée s'annulant avec β, on trouve $a_0 = 0$ et, par suite, $a_2 = 0$, $a_4 = 0$, $a_6 = 0$, ... Mais on trouve aussi

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{2t}\frac{a_1}{1.3}, \\
a_5 &= \frac{1}{2t}\frac{a_3}{5} = \frac{1}{4t^2}\frac{a_1}{1.3.5}, \\
a_{2k+1} &= \frac{(2t)^k}{(-1)^k}\frac{a_1}{1.3.5.7\ldots\overline{2k+1}}.
\end{aligned}$$

Le développement cherché est donc de la forme

$$a_1\left(\beta - \frac{1}{2t}\frac{\beta^2}{1.3} + \frac{1}{4t^2}\frac{\beta^5}{1.3.5} - \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^k}{(2t)^k}\frac{\beta^{2k+1}}{1.3.5\ldots\overline{2k+1}} + \ldots\right),$$

et l'on voit sans peine que le rapport du terme de rang k au terme précédent, dans la série entre parenthèses, tend vers zéro lorsque le nombre k augmente au delà de toute limite, de sorte que cette série est absolument et uniformément convergente à l'intérieur de tout cercle ayant l'origine pour centre. Quant au coefficient a_1, il est égal à la valeur que prend, pour $\beta = 0$, la dérivée de la fonction V. Donc, en vertu de l'équation (3),

$$a_1 = -\frac{1}{4t}.$$

Donc enfin

$$V = -\frac{1}{4t}\left(\beta - \frac{1}{2t}\frac{\beta^3}{1.3} + \frac{1}{4t^2}\frac{\beta^5}{1.3.5} - \ldots\right).$$

Ainsi s'exprime, en fonction de $\beta = y - \alpha$, la deuxième intégrale de M. Bourlet.