NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

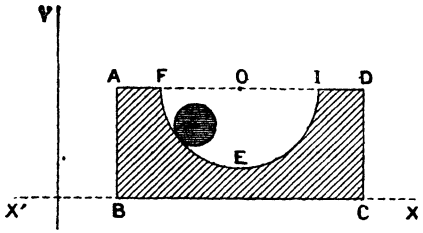
Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 178-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__178_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un rectangle homogène d'épaisseur très petite* ABCD, *on a pratiqué une cavité demi-cir-*



culaire IEF *de centre* O *situé sur* AD.

Ce rectangle est assujetti à rester dans un plan vertical XY *et le côté* BC *peut glisser sans frottement sur l'horizontale* X'X.

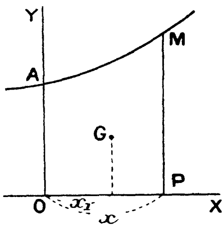
Une poulie ayant la forme d'un cercle homogène, de même épaisseur que le rectangle, peut rouler sans glisser sur le demi-cercle IEF *en restant toujours dans le plan vertical* XY.

On place à l'instant initial la poulie en contact en F *avec la demi-circonférence* FEI *et l'on suppose l'ensemble des deux corps en repos à l'instant initial.*

On demande d'étudier le mouvement de l'ensemble de ces deux solides et de déterminer la réaction exercée par la poulie sur la masse FABCDI.

On désignera par R *le rayon de la circonférence* OF, *par* a *le rayon de la poulie, par* M *la masse du rectangle évidé et par* m *la masse de la poulie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de déterminer une courbe telle que l'abscisse* x_1 *du centre de gravité de l'aire* OAMP *comprise entre la courbe, l'axe des* X, *l'axe*



des Y *et une ordonnée variable* MP *et l'abscisse* x *du point* M *soient dans un rapport constant* m, *en sorte que l'on ait*

$$x_1 = mx.$$

Plus généralement, chercher une courbe telle que l'on ait

$$x_1 = mx^k,$$

k étant un nombre donné.

On pourra chercher encore une courbe telle que

$$x_1 = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée de x. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donné un système de forces appliquées à un corps solide, on demande de déterminer géométriquement et analytiquement la position de l'axe central des moments.*

Trouver la valeur du couple résultant en un point de l'axe central.

APPLICATION. — *Cas d'un système de forces qui se réduit, en prenant pour centre de réduction l'origine des coordonnées, à une force* $R(X, Y, Z)$ *et à un couple d'axe* $G(L, M, N)$, *pour lesquels on a*

$$L = mX, \qquad M = nY, \qquad N = 0, \qquad Z = 0,$$

m et n étant deux nombres donnés.

II. *Un corps solide pesant est assujetti à tourner autour d'un axe horizontal* Oz *passant par deux points fixes* O *et* O'. *Le centre de gravité du corps se trouve dans le plan vertical* xOy *perpendiculaire à* Oz *à une distance de l'axe égale à a.*

On demande de déterminer la valeur des pressions exercées sur les deux points fixes O *et* O' *lorsque le corps est en mouvement.*

Que deviennent ces pressions :

1° *Dans le cas où* Oz *est un axe principal d'inertie relatif au point* O ;

2° *Dans le cas où* Oz *est un axe principal relatif au point* O'.

On donne la masse du corps et les éléments de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un triangle isoscèle* ABC *dont les côtés sont formés par des tiges homogènes pesantes, est assujetti à se mouvoir dans un plan vertical en tournant autour d'un axe fixe horizontal, perpendiculaire à ce plan et passant par son sommet* A.

Trouver la position du centre d'oscillation.

Parmi tous les triangles de même périmètre, quel est celui pour lequel le centre d'oscillation est le plus rapproché du point A ?

On donne la longueur commune b des côtés égaux AB, AC *et la longueur a de* BC. (Novembre 1903.)

Lyon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On a une hélice* H, *variable avec le temps* t *et donnée par les équations*

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = (K + nt)\varphi,$$

où R, K, n *sont des constantes positives et l'axe des* z *vertical et dirigé vers le haut.*

Un point pesant M, *de masse* m, *est assujetti à parcourir l'hélice* H, *avec frottement, le coefficient de frottement étant* f.

Poser les équations différentielles du mouvement et parvenir à une équation différentielle Ω *entre* φ *et* t.

Intégrer Ω *dans le cas où*

$$f = 0$$

et où, pour $t = 0$,

$$\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

SOLUTION.

On remarque que les diverses hélices mobiles s'obtiennent en imprimant, à une hélice rigide, une translation uniforme parallèle à l'axe des z. On est ramené ainsi à un problème facile de mouvement relatif.

II. *Soient*

S *un corps solide mobile;*
A *un point de* S;
D *une droite passant par* A *et invariablement liée à* S;
Δ *une droite fixe de l'espace;*
Ω *l'axe instantané de rotation et de glissement dans le mouvement du corps* S.

On admettra que D *reste constamment perpendiculaire à* Δ, *et que* A *parcourt* Δ.

Établir que la perpendiculaire commune à D *et* Ω *se trouve dans le plan mené par* A *perpendiculairement à* D.

On admet ensuite : 1° que A *parcourt* Δ *d'un mouvement* *uniforme; 2° que, dans le corps* S, *le lieu de l'axe* Ω *est un hyperboloïde de révolution* U *autour de* D.

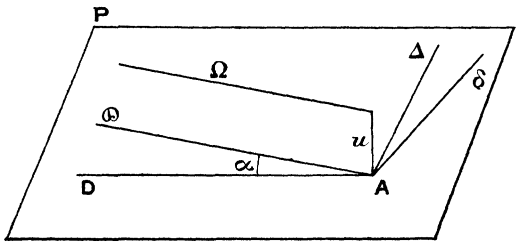
Trouver : 1° quel est le mouvement de S; *2° quel est le lieu de* Ω *dans l'espace?*

SOLUTION.

Si g est une droite, on nommera, pour abréger :

$\overline{g}$ une rotation élémentaire autour de l'axe g;
g_0 la vitesse angulaire de $\overline{g}$;
g' une translation élémentaire parallèle à g;
g'_0 la vitesse de g'.

D décrit une surface de vis à filet carré; donc le mouvement élémentaire de S résulte de $\overline{D}$, $\overline{\Delta}$, Δ'. La résultante $\overline{\mathfrak{D}}$ de $\overline{D}$



et $\overline{\Delta}$ aura son axe $\mathfrak{D}$ situé sur le plan P et faisant avec D l'angle α et avec Δ l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Δ' se décompose en $\mathfrak{D}'$ et en δ', l'axe δ étant normal à $\mathfrak{D}$ et situé sur P.

La rotation $\overline{\mathfrak{D}}$ et la translation δ' se composent en une rotation $\overline{\Omega}$, dont l'axe Ω est parallèle à $\mathfrak{D}$ et situé dans le plan mené par $\mathfrak{D}$ normalement à δ. De plus, $\mathfrak{D}'$ coïncide avec Ω'.

Ω est l'axe instantané de rotation et de glissement.

La perpendiculaire à P en A est normale à Δ, D, Ω. La plus courte distance u est la même pour Ω et D et pour Ω et Δ.

Par hypothèse et dans l'hyperboloïde U, on a u et α constants. Ω est tangente à une hélice tracée sur un cylindre de révolution autour de Δ, de rayon u. Ω engendre une hélicoïde développable W, qui a avec U la génératrice Ω commune. U, entraînant S, roule et glisse sur W; lequel est fixe.

Ensuite on a

$$\Omega'_0 = \mathfrak{D}_0 = \Delta'_0 \sin\alpha = \text{const.},$$

puisque

$$\Delta'_0 = \text{const.}$$

Enfin

$$\Omega_0 = \mathfrak{D}_0 = \frac{\delta'_0}{u} = \frac{\Delta'_0 \cos\alpha}{u} = \text{const.}$$

La vitesse angulaire autour de la génératrice commune Ω, ainsi que la vitesse de glissement le long de la même génératrice sont constantes. (Juillet 1903.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Un tube circulaire infiniment mince, homogène et pesant, est assujetti par des liaisons sans frottement, à se déplacer dans un plan vertical fixe tangentiellement à une horizontale fixe. Un point matériel pesant se meut sans frottement dans le tube. Le rayon du tube est égal à l'unité de longueur; les masses du tube et du point sont toutes deux égales à l'unité de masse. Le tube étant au repos, le point pesant est placé au point de contact du tube avec l'horizontale, et lancé horizontalement avec une vitesse donnée* ω.

Étudier le mouvement du système; calculer la réaction du tube sur le point et montrer que l'on peut choisir ω *de manière que le point décrive tout le tube sans que la réaction change de signe.*

Épreuve pratique. — *Un plan* Π *se meut par rapport à un plan fixe* P *avec lequel il coïncide, de telle sorte que deux points déterminés* A *et* B *de* Π *décrivent, dans* P, *deux cercles égaux, extérieurs l'un à l'autre, et dont la distance des centres est égale à la longueur* AB. *On suppose de plus que le mouvement ne se réduit pas à une translation continue.*

Trouver les courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre, et indiquer sommairement ce que sont les trajectoires des différents points de Π.

Y a-t-il, à certains instants, une translation tangente?

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une barre rectiligne, rigide, homogène et pesante, s'appuie par son extrémité inférieure A sur un plan horizontal fixe sur lequel elle peut glisser sans frottement. On imprime à la barre la rotation ω autour de la verticale ascendante issue de A, et l'on demande d'étudier son mouvement en supposant qu'elle ne cesse pas de s'appuyer sur le plan horizontal fixe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un plan mobile, lié à un système d'axes oxy, glisse sur un plan fixe lié à un système d'axes $o_1x_1y_1$. On suppose que la rotation instantanée a une valeur constante. Dans cette hypothèse, écrire les valeurs des projections sur ox, oy de la vitesse et de l'accélération d'un point quelconque du plan mobile.*

Trouver, à un instant donné, le lieu des points dont l'accélération passe par un point donné du plan mobile.

(Novembre 1903.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un tore se meut d'un mouvement uniforme autour de son axe supposé vertical; un point matériel pesant de masse* 1 *est assujetti à ne pas quitter la surface de ce tore.*

On établira de diverses manières les équations et les intégrales premières du mouvement, en particulier par la méthode de Coriolis, par les théorèmes généraux et par les équations de Lagrange.

On supposera qu'à l'instant initial le point matériel se trouve sur l'équateur au point le plus éloigné de l'axe, et que sa vitesse initiale est horizontale; on donnera un aperçu du mouvement du point sur le tore et l'on s'attachera au cas où le rayon r du cercle générateur est égal à 10, *la distance a de son centre à l'axe est égale à* 20, *la constante g de la gravitation égale à* 981 *et où l'on a, entre la vitesse angulaire ω de rotation du tore et la vitesse initiale v_0, la relation*

$$\omega + \frac{v_0}{a+r} = \sqrt{\frac{g}{45}}.$$

On calculera la pression exercée par le point matériel sur le tore.

Épreuve pratique. — *Un tronc de cône homogène dont la hauteur est de* 4^{cm} *et les rayons de base de* 5^{cm} *et de* 2^{cm} *peut osciller autour de l'une de ses arêtes latérales supposée horizontale; on le place d'abord dans une position telle que la hauteur soit dans un même plan horizontal avec l'axe de suspension, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.*

Calculer la durée de l'oscillation du tronc de cône.

Solution.

Suivons la méthode de Coriolis; prenons des axes $Oxyz$ entraînés avec le tore, O étant le centre et Oz l'axe de rotation dirigé vers le bas; la force centrifuge a pour composantes $\omega^2 x$, $\omega^2 y$ et o; la force centrifuge composée a pour composantes $2\omega\frac{dy}{dt}$, $-2\omega\frac{dx}{dt}$ et o; soient N_x, N_y, N_z les composantes de la réaction normale.

Les équations du mouvement sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \omega^2 x + 2\omega\frac{dy}{dt} + N_x,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \omega^2 y - 2\omega\frac{dx}{dt} + N_y,\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g + N_z. \end{aligned}\right.$$

On en déduit deux intégrales premières, celle des moments des quantités de mouvement et celle des forces vives, dans lesquelles la réaction se trouve éliminée. Désignons par ρ, θ et z les coordonnées semi-polaires du mobile M et par φ l'angle formé avec le plan de l'équateur par le rayon du cercle générateur aboutissant au point M.

La première intégrale est

$$\rho^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega\right) = C$$

ou bien

$$(2)\qquad (a + r\cos\varphi)^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega\right) = C;$$

la deuxième est

$$v^2 = \omega^2 \rho^2 + 2gz + 2h$$

ou bien

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (a + r\cos\varphi)^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$
$$= \omega^2 (a + r\cos\varphi)^2 + 2gr\sin\varphi + 2h.$$

En éliminant $\frac{d\theta}{dt}$, et tenant compte des conditions initiales, on a

$$(3) \quad r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{(a+r)^2} - \frac{C^2}{(a + r\cos\varphi)^2} + 2gr\sin\varphi,$$

avec

$$C = (a + r)^2 \left(\frac{v_0}{a+r} + \omega\right).$$

L'équation (3) définit φ en fonction du temps; on voit que le second membre s'annule pour $\varphi = 0$ et n'est positif que si $\sin\varphi$ est positif; en prenant la dérivée de ce second membre, on voit qu'elle est d'abord positive, mais décroît constamment et s'annule une seule fois entre 0 et π; on en conclut que le second membre de (3), d'abord nul, est ensuite positif, puis décroît et s'annule pour une valeur de φ comprise entre 0 et π; par conséquent le mobile oscille entre le parallèle primitif et un parallèle situé au-dessous de l'équateur.

L'équation (2) montre que le mouvement absolu se projette sur le plan des xy suivant la loi des aires; la troisième équation du système (1) sert à déterminer la pression normale. Dans le cas particulier indiqué dans l'énoncé, l'équation (3) prend la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{5}\left(1 + \sin\varphi - \frac{9}{(2 + \cos\varphi)^2}\right).$$

(Juillet 1903.)