Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 172-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__172_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de Mécanique rationnelle, Tome III : Équilibre et mouvement des milieux continus; par M. *P. Appell,* Membre de l'Institut. — 1 vol. in-8 de 558 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903. Prix : 15fr.

Voici près d'un an que le troisième Tome du *Traité de Mécanique rationnelle* est paru et l'on pourrait s'étonner à bon droit de ce qu'il n'a pas encore été signalé dans ce journal. C'est que les Ouvrages de l'éminent doyen de la Faculté des Sciences de Paris sont de ceux qu'il ne faut pas lire à la légère et qui méritent qu'on en fasse un compte rendu détaillé.

Ce Volume est remarquable.

Nous y retrouvons les admirables qualités d'exposition qui font de M. Appell l'un des premiers professeurs de France et grâce auxquelles il sait rendre faciles les sujets les plus abstraits. Entre ses mains tout devient clair et simple; et, à lire son exposition de ces théories difficiles qui n'ont vu que lentement le jour, on s'étonne presque, tant elles paraissent naturelles, qu'on ait mis si longtemps à les échafauder.

Ce Tome troisième, et probablement dernier, est réservé à l'étude de l'*équilibre et du mouvement des milieux continus*.

A première vue, les deux Chapitres du début paraissent donc hors du cadre de l'Ouvrage, puisque l'un est un Chapitre de Calcul intégral et le suivant une étude du potentiel newtonien. L'un et l'autre sont cependant utiles, pour ne pas dire nécessaires, à la suite.

Le Chapitre XXVIII (premier du Volume) contient en effet la démonstration et l'étude de la formule de Green

$$\int\int\int_V \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\tau = \int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma$$

et de la formule de Stokes

$$\int_L P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$
$$= \int\int_S \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] d\sigma$$

qui, l'une et l'autre, servent de base à l'étude des propriétés des intégrales de volumes et d'aires dans un champ de vecteurs.

Immédiatement, et indépendamment de toute signification concrète, nous apprenons à connaître la notion de *flux* à travers une surface, de *divergence* d'un vecteur en un point, de *tourbillon* d'un vecteur et de *flux de tourbillon*.

De telle sorte que, lorsqu'on s'est bien assimilé les résultats fondamentaux de ce Chapitre d'Analyse pure, la lecture de la suite du Volume n'est plus qu'un jeu.

Ces généralités trouvent immédiatement une première application dans la théorie de l'attraction universelle et du potentiel qui fait l'objet du Chapitre XXIX suivant.

Nous y retrouvons, avec un peu plus de détails, les *Leçons sur le Potentiel* du même auteur, publiées jadis à la librairie Carré et Naud. L'étude de l'attraction de points isolés, de surfaces, de volumes, avec les applications classiques à la droite, au plan, à la sphère et aux ellipsoïdes, conduit à la connaissance de l'équation de Laplace

$$\Delta U = 0$$

et à celle des fonctions harmoniques qui la vérifient. L'analogie des formules avec beaucoup de celles qui suivront serait déjà une raison suffisante pour expliquer la place que M. Appell a donnée au potentiel newtonien dans son œuvre, si, par ailleurs, les tendances naturelles que l'on a d'assimiler l'électricité à un fluide n'imposaient pas cette classification.

Avec le Chapitre XXX nous entrons réellement dans l'étude des milieux continus par la démonstration des équations générales d'équilibre et de mouvement d'un tel milieu, indépendamment de toute hypothèse sur sa nature. La seule application du principe de solidification à un élément quelconque de volume pris dans le milieu, conduit aux équations fondamentales

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} T_x &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,\\ T_y &= T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma,\\ T_z &= T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho(X - J_x) &= \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z},\\ \rho(Y - J_y) &= \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z},\\ \rho(Z - J_z) &= \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

qui fournissent l'effort T sur tout élément de surface et définissent le mouvement.

L'introduction de la *quadrique directrice* et de l'*ellipsoïde des efforts* permet de donner une interprétation géométrique simple des résultats.

Le Chapitre XXXI est l'application des formules générales à l'*Hydrostatique.* Ici des hypothèses sont nécessaires. Celle de la *fluidité* conduit à admettre que

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = p,$$

p étant la pression; et cette pression elle-même ne peut être définie que par *l'équation caractéristique* du fluide entre la pression, la densité et la température, dont seule l'expérience pourra déterminer la forme. C'est ici que nous commençons à sentir que nous sommes aux confins de la Mécanique dite *rationnelle,* à l'un de ces points de jonction où la Mécanique théorique se soude et se mêle à la Mécanique appliquée et à la Physique. C'est là que l'on voit combien sont précaires les classifications artificielles que nous avons faites dans la Science!

Après l'exposé de l'Hydrostatique classique, principes d'Archimède et de Pascal, calcul des poussées, etc., M. Appell aborde, avec quelques détails, la question délicate de l'équilibre des corps flottants.

Ce sont surtout les remarquables travaux de M. Guyou, avec d'élégantes démonstrations géométriques, qu'il nous fait connaître.

Au Chapitre XXXII nous entamons l'étude générale des déformations d'un milieu continu, au point de vue géométrique. On ne se préoccupe pas encore de savoir *comment* cette déformation se produit, comment elle dépend du temps ou des efforts qui s'exercent sur le milieu; on se contente d'étudier les propriétés mêmes de cette déformation, supposée produite.

Tout d'abord, en exprimant que la *masse* d'un élément du milieu reste invariable dans la déformation, on obtient l'équation fondamentale dite *de continuité*

$$\rho_1 D - \rho = 0$$

qui lie les densités ρ et ρ_1 d'un élément avant et après la déformation au déterminant fonctionnel D.

L'analyse du problème conduit ensuite à des conclusions dont l'analogie avec celles relatives au déplacement d'un corps solide est complète.

Il nous suffira de citer le théorème du n° 679 :

Toute déformation homogène peut être obtenue par une translation et une rotation suivie d'une déformation pure.

La déformation dite *pure* est celle que subirait par exemple un corps que l'on chaufferait sans le déplacer. Le déplacement du corps solide n'est alors que le cas particulier où la déformation pure est nulle, où $\rho = \rho_1$ et $D = 1$ pour tous les éléments.

Le cas particulier de la déformation *infiniment petite*, étudiée avec soin dans le dernier paragraphe de ce Chapitre, a une importance toute particulière puisqu'il sert d'introduction au Chapitre XXXIII réservé à la cinématique des milieux continus. Ici le déterminant D a la valeur particulièrement simple

$$D = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

où u, v, w désignent les projections du déplacement infiniment petit de l'élément et, par suite, lorsqu'il s'agit d'un liquide incompressible, pour lequel $\rho = \rho_1$, $D = 1$, on a l'équation fondamentale

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

à laquelle se réduit l'équation de continuité.

Le problème maintenant se précise.

Après avoir étudié, suivant les méthodes de M. M. Cosserat, *une* déformation, nous abordons maintenant l'examen d'une *suite ininterrompue* de déformations successives. Les coordonnées x, y, z d'un élément sont alors des fonctions du temps dont il s'agit d'étudier la forme lorsqu'on embrasse à la fois tous les éléments de la masse.

La question peut alors se présenter sous deux faces.

D'une part, on peut considérer *un élément* particulier de la masse et le suivre sans cesse dans son mouvement. Les coordonnées x, y, z sont alors des fonctions du temps t et des coordonnées a, b, c de sa position initiale : ce sont les variables a, b, c, t de Lagrange.

Ou bien, d'autre part, on peut porter son attention sur *un point donné* de l'espace et examiner ce qu'il advient en ce point lorsque les éléments fluides y passent. Ce qui intéresse alors c'est de connaître à chaque instant les composantes u, v, w de la vitesse de l'élément qui passe en ce point. Ces composantes sont alors des fonctions des coordonnées x, y, z du point considéré et du temps t : ce sont là les variables d'Euler.

Ce sont surtout ces variables dont l'emploi paraît fécond.

En chaque point de l'espace on définit ainsi à chaque instant un vecteur W qui est la vitesse de la molécule fluide qui y passe et l'on a ainsi un champ de vecteurs auquel on peut appliquer toutes les propositions générales relatives aux flux et aux tourbillons, établies dans le Chapitre initial.

Le terrain est maintenant déblayé et, par étapes successives, nous sommes finalement arrivés à connaître tous les éléments qui nous sont nécessaires pour appliquer les équations fondamentales (1) et (2) du mouvement des milieux continus au cas particulier des fluides.

Nous atteignons le but, la dynamique des fluides, au Chapitre XXXIV qui se prolonge par l'admirable théorie des tourbillons de Helmholtz, exposée au Chapitre XXXV, et une étude approfondie, au Chapitre XXXVI, des mouvements parallèles à un plan.

Ici, puisque

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = p,$$

les équations (2) se réduisent à

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho(X - J_x), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho(Y - J_y), \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho(Z - J_z),$$

et l'équation de continuité devient

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

La Cinématique nous fournit J_x, J_y, J_z et l'équation caractéristique du fluide nous donne une relation entre ρ, p et la température τ.

Après la démonstration du fameux théorème de Lagrange sur la conservation du potentiel des vitesses, l'auteur nous donne la série des applications classiques de l'Hydrodynamique : filets liquides, théorèmes de Bernoulli et de Toricelli, écoulement d'un gaz, etc.

La théorie des tourbillons, nous dit M. Appell, constitue le plus grand progrès fait en Hydrodynamique depuis les recherches d'Euler, Lagrange et Cauchy. C'est là un des Chapitres les plus intéressants de l'Ouvrage. Les propriétés des *Wirbelfaden*, des anneaux et filets de tourbillon qui se déplacent et se déforment en restant sans cesse formés des mêmes éléments fluides; les explications théoriques de phénomènes complexes qui en résultent sont un des plus remarquables exemples de la puissance féconde de l'application de l'Analyse à l'étude des phénomènes naturels.

L'Ouvrage se termine par un Chapitre de notions sur la théorie de l'élasticité et un très court Chapitre sur les travaux encore peu étendus relatifs aux liquides visqueux.

La théorie de l'élasticité à elle seule, avec ses applications, pourrait remplir de gros volumes. Il faut savoir se limiter, d'autant plus que cette théorie, tout intéressante qu'elle soit, paraît, au moins sous sa forme purement théorique actuelle, en l'absence de connaissances expérimentales relatives aux déformations *finies* des corps élastiques, ne pouvoir s'appliquer que dans des limites très restreintes aux problèmes variés que nous offre la pratique.

Cette rapide analyse ne peut évidemment donner qu'une faible idée de ce bel Ouvrage, de son ordonnance parfaite, de sa grande limpidité.

Il faut le lire. CARLO BOURLET.