NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

Sur la surface de moindre résistance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 160-166

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__160_1>

[J3b]

SUR LA SURFACE DE MOINDRE RÉSISTANCE;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

La surface de moindre résistance est la surface de révolution d'axe donné qui éprouve la plus petite résistance (lorsqu'elle se déplace dans l'air dans la direction de son axe), parmi celles qui sont engendrées par une courbe méridienne terminée en deux points fixes A, B dont l'un peut être situé sur l'axe.

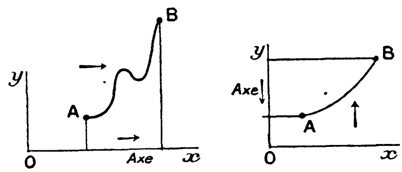
Il y a lieu de faire quelques remarques au sujet de la façon dont le problème a été résolu par différents auteurs. Tout d'abord, l'expression de la résistance est mise généralement sous la forme suivante :

$$R = k\int_a^b y\frac{y'^3_x}{1+y'^2_x}\,dx,$$

en prenant l'axe de révolution comme axe des x. Cette formule s'obtient immédiatement en supposant que la résistance normale par unité de surface soit proportionnelle à la projection sur la normale du carré de la vitesse.

Or, il n'est pas évident que le minimum de cette intégrale corresponde au minimum de la résistance. En effet, cette intégrale a un sens lorsque y est une fonction uniforme et continue de x quelconque; tandis qu'elle ne représente la résistance que pour les courbes qui ne sont coupées qu'en un point par une parallèle à Ox. Il est manifeste que l'on doit exclure de l'ensemble des courbes acceptables, des courbes telles que celle qui est représentée (*fig.* 1). Ainsi le problème ne se pose que

Fig. 1.



lorsque x est fonction continue et *uniforme* de y. Il y a donc lieu (si l'on veut considérer comme d'habitude y comme fonction uniforme de x) de prendre l'axe de révolution *comme axe des* y. Et l'on obtient l'expression exacte cette fois pour la résistance (en négligeant la résistance de la surface frontale qui est constante)

$$R = k\int_\alpha^\beta \frac{x\,dx}{1+y'^2}.$$

L'équation différentielle des extrémales (courbes annulant la variation première de R) sera de la forme

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0 \qquad \text{en posant} \qquad f = \frac{x}{1+y'^2}.$$

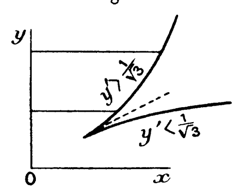
Cette équation donnera la même famille de courbes qu'avec la formule précédente. Mais il ne faut pas commettre l'erreur qui consiste à écrire l'équation des extrémales après avoir pris comme variable l'arc s de la courbe [1]. En effet, en opérant ainsi, on suppose implicitement que les limites d'intégration sont fixes et, par conséquent, que *la longueur de la courbe est constante.* Le problème que l'on résout *n'est donc plus le même.*

L'équation des extrémales est ici :

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{-2y'}{(1+y'^2)^2}\right) = 0.$$

En intégrant, on a la courbe (*fig.* 2) en fonction

Fig. 2.



d'un paramètre p qui est le coefficient angulaire de la tangente

$$x = c\,\frac{(1+p^2)^2}{p}, \qquad y = c\left(\frac{3p^4}{4} + p^2 - \mathrm{L}p\right) + e.$$

Et l'on sait que s'il y a une courbe continue (*à tan-*

(1) *Voir* Starkoff, *Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XIII, 1884-1885, p. 132).

gente continue ou non) qui donne le minimum, c'est nécessairement une extrémale ou une suite d'arcs d'extrémales ([1]).

Pour voir si cette courbe peut donner le minimum, formons, d'après la méthode de Weierstrass ([2]), la quantité

$$\begin{aligned}E(x,y,p,p_1) &\equiv f(x,y,p_1) - f(x,y,p) + (p-p_1)\frac{\partial}{\partial p}f(x,y,p)\\ &= \frac{x(p_1-p)^2}{(1+p_1^2)(1+p^2)^2}[2pp_1+p^2-1].\end{aligned}$$

Il *faut* que cette quantité soit constamment positive ou nulle *quel que soit* p_1 lorsque y est l'ordonnée de l'extrémale considérée et p le coefficient angulaire de la tangente. Du moins, c'est une condition nécessaire pour que l'extrémale considérée présente un minimum *fort*, c'est-à-dire un minimum relativement aux courbes dont la différence des ordonnées avec celles-ci ait un maximum infiniment petit ([3]). Or, cette condition nécessaire (qui n'est pas du reste la seule) n'est évidemment pas satisfaite ici puisque le crochet est du premier degré en p_1 et par conséquent a un signe quelconque. Par conséquent, on doit pouvoir trouver des courbes aussi rapprochées que l'on veut d'une extrémale et qui donnent des valeurs plus petites pour R. *Il n'y a donc pas de minimum absolu.* Et en effet, Legendre a montré ([4]) qu'on pouvait construire des courbes continues (des lignes brisées) pour lesquelles la résistance a une valeur aussi petite que l'on veut. La limite inférieure de

---

([1]) *Voir* HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, professées au Collège de France (à paraître prochainement).

([2]) ID., *loc. cit.*

([3]) ID., *loc. cit.*

([4]) *Mémoires de l'Académie Royale de Paris*, 1786, § VI.

la quantité positive R est donc zéro et cette limite n'est pas atteinte. Il faut d'ailleurs remarquer que les lignes de Legendre ont des longueurs croissant indéfiniment et par conséquent ne correspondent pas à une solution *pratique*.

Au point de vue du calcul des variations, il y a lieu de chercher aussi les courbes qui présentent un minimum *faible* [1], c'est-à-dire qui présentent un minimum relativement aux courbes telles que, non seulement leurs ordonnées soient voisines de celles de l'extrémale considérée, mais encore que les coefficients angulaires de leurs tangentes varient très peu d'une courbe à l'autre.

Pour qu'il y ait minimum faible, il faut d'abord que la quantité $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ garde un signe constant sur l'extrémale γ considérée. Or on a ici :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{2x(3y'^2 - 1)}{(1 + y'^2)^3}$$

et d'autre part la courbe présente deux branches reliées par un point de rebroussement pour $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C'est donc la branche qui correspond à $y' > \frac{1}{\sqrt{3}}$ qui seule peut donner un minimum faible. Pour qu'elle le donne effectivement, il faut encore que les extrémales issues de A coupent l'extrémale considérée γ en un point A′ dont la limite, lorsque ces extrémales tendent vers γ, soit en dehors de l'arc AB [2]. Autrement dit, il faut que l'équation aux variations des extrémales n'ait pas de solution nulle en x_0 et nulle pour x compris entre α

---

(1) HADAMARD, *loc. cit.*

(2) ID., *loc. cit.*

et β. Or cette équation aux variations est

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x(3y'^2-1)}{(1+y'^2)^3}Y'\right)=0,$$

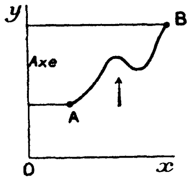
Y' étant la variation. L'intégrale générale est

$$\begin{aligned} Y &= m\int\frac{(1+y'^2)^3}{x(3y'^2-1)}dx+n \\ &= m\int(1+y'^2)^2\frac{dy'}{y'}+n=m\left(\frac{y'^4}{4}+y'^2+\mathrm{L}y'\right)+n. \end{aligned}$$

Or, celle-ci ne peut s'annuler pour deux abscisses différentes. En effet, il faudrait qu'elle s'annule pour deux valeurs différentes de y', et par conséquent que la fonction $\varphi=\frac{y'^4}{4}+y'^2+\mathrm{L}y'$ puisse prendre deux fois la même valeur. Ceci est impossible, car la dérivée $\frac{(1+y'^2)^2}{y'}$ en y' est toujours positive (y' toujours positif sur l'extrémale) et alors cette fonction φ croît toujours. Donc l'intégrale Y ne peut s'annuler deux fois (autrement dit, les extrémales issues d'un point n'ont pas d'enveloppes). Par conséquent, si les deux points A et B sont situés sur la branche $y'>\frac{1}{\sqrt{3}}$ d'une même extrémale γ, l'arc AB de γ fournira bien un minimum faible.

Remarque. — Puisqu'il n'y a pas de minimum absolu, le problème posé par Newton n'admet pas de solution. La question est donc tranchée au point de vue analytique. Toutefois, il y a lieu de se demander s'il ne conviendrait pas d'augmenter le nombre des conditions imposées à la courbe méridienne, pour se rapprocher de la pratique. En effet, nous avons supposé que y est une fonction de x uniforme et continue. Cela n'exclut pas le choix de courbes présentant une cavité (*fig.* 3). Or on sait que dans ce cas, l'air contenu dans cette cavité forme comme un matelas sur lequel vient glisser l'air en mouvement. De telle sorte qu'il y aurait peut-être lieu, soit de supposer que la courbe a toujours sa conca-

Fig. 3.



vité du même côté des y positifs ou négatifs, soit de modifier la formule qui donne la résistance. On sait d'ailleurs que, même dans les cas les plus simples, la formule de Newton est loin d'avoir été établie avec toute la précision désirable.