NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. DREYFUS

Définition de $\sin z$ par un produit infini

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 147-156

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__147_0>

[D6b]

DÉFINITION DE $\sin z$ PAR UN PRODUIT INFINI;

PAR M. L. DREYFUS.

THÉORÈME. — *Si l'on considère les séries*

$$S_p = a_{p,0} + a_{p,1} + \ldots + a_{p,n} + \ldots$$

supposées uniformément convergentes en fonction de p, et si les quantités $a_{p,n}$ ont pour limites, lorsque l'entier p augmente indéfiniment, des nombres a_n, la série

$$S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

étant convergente, les sommes S_p ont pour limite S.

En effet, ε étant un nombre positif donné, je peux déterminer un entier, tel que les restes R_m et $R_{p,m}$ soient moindres chacun que $\frac{\varepsilon}{3}$, l'inégalité $R_{p,m} < \frac{\varepsilon}{3}$ ayant lieu quel que soit p; m étant ainsi déterminé, il existe un nombre P tel que la différence $S_{p,m} - S_m$ soit, en valeur absolue, moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$ si $p > P$; et, par suite, la différence

$$S - S_p$$

sera, si $p > P$, moindre en valeur absolue que le nombre positif ε, choisi aussi petit qu'on le veut : c'est dire que S_p a pour limite S.

THÉORÈME. — *Je considère les produits infinis*

$$P_q = (1 + a_{q,0})(1 + a_{q,1})\ldots(1 + a_{q,n})\ldots$$

uniformément convergents en fonction de q; si le *quantités $a_{q,n}$ ont pour limites des nombres a_n, le produit infini*

$$P = (1 + a_0) \ldots (1 + a_n) \ldots$$

étant convergent; je dis que les produits P_q ont pour limite P.

En effet, je peux considérer ces produits infinis comme somme des séries

$$\begin{aligned} P_q &= P_q^{(0)} + P_q^{(0)} a_{q,1} + P_q^{(1)} a_{q,2} + \ldots, \\ P &= P^{(0)} + P^{(0)} a_1 + P^{(1)} a_2 + \ldots, \end{aligned}$$

en désignant par $P_q^{(n)}$ le produit des n premiers facteurs de P_q et par $P^{(n)}$ celui des n premiers facteurs de P.

On est alors ramené au théorème précédent, car $a_{q,n}$ tend vers a_n, le produit limité $P_q^{(n)}$ a pour limite le produit limité $P^{(n)}$ et les séries donnant P_q sont, par hypothèse, uniformément convergentes.

Je considère le produit infini

$$P(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots,$$

z étant une variable complexe de module Z; la série des modules

$$\frac{Z^2}{\pi^2} + \frac{Z^2}{4\pi^2} + \ldots + \frac{Z^2}{n^2\pi^2} + \ldots$$

étant, quel que soit z, dans une aire donnée, uniformément et absolument convergente, le produit sera lui-même absolument et uniformément convergent et représentera une fonction de z définie et continue en tout point du plan de la variable complexe z.

Elle admet les zéros simples

$$\begin{array}{ccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, \\ & -1, & -2, & -3, & \ldots. \end{array}$$

Théorème. — *La fonction* $P(z)$ *admet la période* 2π.

Je vais démontrer d'abord que l'on a

$$P(z+\pi) = -P(z).$$

En effet, le produit $P(z)$ est équivalent au produit infini

$$Q(z) = z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots;$$

ce produit infini n'est plus absolument convergent, on ne pourra en intervertir les termes d'une façon quelconque, mais on pourra les déplacer d'un ou deux rangs sans changer la convergence ni la valeur du produit $Q(z)$.

Je pose

$$\begin{aligned} v_0(z) &= z, \\ v_{2p}(z) &= 1+\frac{z}{p\pi}, \\ v_{2p-1}(z) &= 1-\frac{z}{p\pi}; \end{aligned}$$

on a

$$P_m = Q_{2m} = v_0 v_1 v_2 \ldots v_{2m}.$$

Je remplace dans $P_m(z)$, z par $z+\pi$; j'aurai les égalités

$$\begin{aligned} v_{2p-1}(z+\pi) &= \frac{p-1}{p}\left(1-\frac{z}{(p-1)\pi}\right) = \frac{p-1}{p} v_{2p-3}, \\ v_{2p}(z+\pi) &= \frac{p+1}{p}\left(1+\frac{z}{(p+1)\pi}\right) = \frac{p+1}{p} v_{2p+2}; \end{aligned}$$

pour les deux premiers termes, ces formules ne sont plus applicables, car $p=0$ ou 1, et l'on a

$$\begin{aligned} v_1(z+\pi) &= -\frac{z}{\pi} = -\frac{v_0(z)}{\pi}, \\ v_0(z+\pi) &= z+\pi = \pi v_2(z); \end{aligned}$$

par suite, on peut écrire

$$Q_{2m}(z+\pi) = - v_2 v_0 v_4 v_1 v_6 v_3 \ldots v_{2m} v_{2m-3} v_{2m+2} \frac{m+1}{m};$$

car on peut remplacer le produit des deux facteurs consécutifs $\frac{p+1}{p} v_{2p+2}$ et $\frac{p}{p+1} v_{2p-1}$ par $v_{2p+2} v_{2p-1}$. On peut ensuite changer de deux rangs l'ordre des facteurs, et écrire

$$\left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) P_m(z+\pi) = -\left(1 + \frac{z}{(m+1)\pi}\right)\left(1 + \frac{1}{m}\right) P_m(z).$$

m augmentant indéfiniment, cette égalité sera toujours vraie, et, en remplaçant chaque facteur par sa limite, on aura

$$P(z+\pi) = -P(z),$$

et, par suite, on a

$$P(z+2\pi) = P(z).$$

De plus, il est évident que la fonction $P(z)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire que l'on a

$$P(z) = -P(-z),$$

puisque tous les facteurs $\left(1 - \frac{z^2}{p^2\pi^2}\right)$ conservent leurs valeurs, si l'on y remplace z par $-z$; seul, le premier facteur change de signe.

On en conclut que l'on a

$$P(z+\pi) = -P(z).$$

Donc on a

$$P(z-\pi) = -P(z),$$
$$P(\pi - z) = P(z).$$

Ces propriétés appartiennent à $\sin z$. Je vais démontrer que $P(z) = \sin z$.

En même temps que la fonction $P(z)$, il faudra considérer la fonction $P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=P\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$, que je vais développer en produit infini. J'aurai

$$v_{2p}\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = 1+\frac{z+\frac{\pi}{2}}{p\pi}=\frac{p+\frac{1}{2}}{p}\left(1+\frac{z}{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}\right),$$

$$v_0\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{z}{\frac{1}{2}\pi}\right),$$

$$v_{2p-1}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{p-\frac{1}{2}}{p}\left(1-\frac{z}{\left(p-\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$$

et, par suite, on en conclut, en groupant chaque facteur d'indice impair avec celui qui le précède, ce qui est permis,

$$P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

De sorte que le produit $P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ est égal au produit des deux produits absolument convergents

$$A=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{4.6}\right)\left(1+\frac{1}{6.8}\right)\cdots,$$

$$Q(z)=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

Je démontrerai par la suite que $A=1$, de sorte que j'aurai

$$P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Les théorèmes généraux sur les produits infinis dépendant d'une variable montrent que la fonction $P(z)$ a une dérivée; dans ce qui va suivre, je vais montrer directement que cette fonction a une dérivée et que cette dérivée est le produit $Q(z)$.

Je remarque d'abord que si $P(z)$ a une dérivée, cette dérivée $P'(z)$ satisfait aux deux relations

$$\begin{aligned} P'(z+\pi) &= -P'(z), \\ P'(z) &= P'(-z), \end{aligned}$$

et, en faisant $z = -\frac{\pi}{2}$, on trouve que $P'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et, par suite, la dérivée admet les mêmes zéros que $Q(z)$. Je vais démontrer que cette dérivée est effectivement $Q(z)$, d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} P'(z) &= \frac{1}{A} P\left(z + \frac{\pi}{2}\right), \\ P''(z) &= \frac{1}{A^2} P(z+\pi), \\ &= -\frac{1}{A^2} P(z) \end{aligned}$$

et, par suite, $P(z)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{A^2} y = 0$$

qui admet pour intégrale générale

$$y = \alpha \sin\left(\frac{z}{A} + \beta\right),$$

α et β étant deux constantes quelconques, puisque $P(z)$ admet la période 2π, A est égal à l'unité; $P(z)$ s'annulant pour $z = 0$, β est nul; enfin, $\frac{P(z)}{z}$ tendant vers 1 quand z tend vers zéro, α est égal à 1 et, par suite, $P(z)$ est égal à $\sin z$.

Il faut donc démontrer que *la dérivée de* $P(z)$ *existe et qu'elle est* $Q(z)$.

Le polynome $P_m(z)$ ne contient que des termes de degré impair; il est de degré $2m+1$ et admet les racines toutes réelles

$$0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \ldots, \quad \pm m\pi;$$

ses coefficients sont donc réels et on peut lui appliquer le théorème de Rolle.

Sa dérivée est un polynome de degré $2m$, à racines toutes réelles et dont les termes sont tous de degré pair; par suite, les $2m$ racines sont deux à deux égales et de signes contraires.

Je peux donc écrire

$$P'_m(z) = B\left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2_{m,1}}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2_{m,2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2_{m,m}}\right).$$

Le nombre positif α_{mp} est compris entre $(p-1)\pi$ et $p\pi$, limites exclues, puisque le polynome P_m n'a pas de racines doubles. Le coefficient B est d'ailleurs égal à l'unité, puisque l'on peut écrire

$$P_m(z) = z + Kz^3 + \ldots,$$
$$P'_m(z) = 1 + 3Kz^2 + \ldots.$$

Je dis que l'on a

$$\alpha_{m,p} < \alpha_{m-1,p}.$$

En effet, si z est réel et varie dans l'intervalle $(p-1)\pi \ldots p\pi$, la dérivée logarithmique de $P_m(z)$ est positive ou négative, suivant que z est inférieur ou supérieur à $\alpha_{m,p}$; or, on a par définition

$$P_m = P_{m-1}\left(1 - \frac{z^2}{m^2\pi^2}\right),$$

$$\frac{P'_m(z)}{P_m(z)} = \frac{P'_{m-1}(z)}{P_{m-1}(z)} - \frac{2z}{1 - \frac{z^2}{m^2\pi^2}}$$

et par suite

$$\frac{P'_m(\alpha_{m,p})}{P_m(\alpha_{m-1,p})} = 0 + \frac{-2\alpha_{m,p}}{1 - \frac{\alpha^2_{m-1,p}}{m^2\pi^2}}.$$

Donc la dérivée logarithmique de P_m est négative pour $z = \alpha_{m-1,p}$, et par suite

$$\alpha_{m-1,p} > \alpha_{m,p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc les nombres $\alpha_{m,p}$ diminuant avec $\frac{1}{m}$, mais restant supérieurs à $(p-1)\pi$, ont une limite α_p.

D'ailleurs α_p est compris entre $(p-1)\pi$ et $p\pi$, donc le produit infini

$$R(z) = \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_p^2}\right)\cdots$$

est convergent, et l'on en conclut, en appliquant le lemme démontré précédemment, que les produits $P'_m(z)$ ont pour limite $R(z)$. Si l'on intègre entre deux limites z_0 et z, on a

$$P_m(z) - P_m(z_0) = \int_{z_0}^{z} P'_m(z)\,dz.$$

La fonction sous le signe $\int$ est intégrable et uniforme : elle est uniformément convergente, en fonction de m, vers la fonction $R(z)$, donc le premier membre de l'équation a aussi une limite et cette limite est d'ailleurs $P(z) - P(z_0)$. C'est dire que $R(z)$ est la dérivée de $P(z)$.

Cette dérivée s'annule pour une valeur et une seule comprise entre $(p-1)\pi$ et $p\pi$, nous avons dit qu'elle s'annulait pour $(2p-1)\frac{\pi}{2}$; donc

$$\alpha_p = \frac{(2p-1)\pi}{2}$$

et $R(z)$ coïncide avec

$$Q(z) = P\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

et l'on a donc

$$P(z) = \sin z.$$

Il résulte donc les deux développements infinis suivants :

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

Nous avons vu aussi que $A = 1$, il en résulte l'égalité de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots.$$

Si l'on développe $P_m(z)$ en un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de z, on aura

$$P_m(z) = z - B_1\frac{z^3}{\pi^2} + B_2\frac{z^3}{\pi^4} + \cdots.$$

B_p est la somme de tous les produits p à p, des inverses des carrés des m premiers nombres, les nombres entrant dans chaque produit étant distincts, on a donc

$$B_p < (B_1)^p.$$

Lorsque m augmente indéfiniment B_1 a pour limite la somme de la série convergente

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots,$$

les nombres B_2, B_3, ... sont des nombres positifs croissants et respectivement moindres que S^2, S^3, ..., S^p si l'on désigne par b_1, b_2, ..., b_p ces limites, la série

$$z - \frac{b_1}{\pi^2}z^2 + \frac{b_2}{\pi^4}z^5 - \cdots$$

sera convergente et, par suite du premier théorème démontré précédemment, sera la limite des polynomes $P_m(z)$. C'est-à-dire que l'on aura

$$\sin z = z - \frac{b_1}{\pi^2} z^3 + \ldots,$$

série convergente au moins dans le cercle de rayon $\frac{\pi}{\sqrt{b_1}}$, mais on connaît déjà le développement

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

et une fonction ne peut que d'une seule façon être représentée par une série entière. On a donc un certain nombre d'égalités numériques, dont la première donne la somme S,

$$\frac{\pi^2}{1.2.3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots.$$