Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 130-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__130_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donné dans un plan* xOy *un contour fermé* (C) *et l'intégrale curviligne*

$$J = \int P\,dx + Q\,dy,$$

étant prise le long du contour C, *établir la formule de Green qui exprime* J *à l'aide d'une intégrale double.*

Condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale J *prise suivant un chemin allant du point* M_0 *au point* M *ne change pas quand on fait varier le chemin en laissant fixes les deux points* M_0 *et* M.

II. *En coordonnées rectangulaires* $Oxyz$, *former l'équa-*

tion aux dérivées partielles des surfaces représentées par l'équation

$$z - a\theta = f(r),$$

où a est une constante, f une fonction arbitraire de r, et où l'on pose

$$\theta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2 + x^2}.$$

Intégrer le système

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{a}.$$

III. *En coordonnées rectangulaires, on prend sur le paraboloïde représenté par l'équation*

$$z = xy$$

la courbe (C) *dont la projection sur le plan des xy est un cercle de rayon* R *ayant son centre à l'origine; on mène le plan tangent au paraboloïde en un point* M *situé sur la courbe* (C).

Lorsque le point M *varie sur cette courbe, montrer que le plan tangent fait un angle constant avec Oz, trouver l'enveloppe de sa trace sur le plan xOy, trouver l'arête de rebroussement de la surface développable qu'il enveloppe, et les développantes de cette arête de rebroussement.*

(Juillet 1903.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *La normale au point* M *d'une surface coupant le plan* XOY *au point* P, *on considère les surfaces* S *telles que* MP = OP.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces;*

2° *Intégrer cette équation et former l'équation générale des surfaces* S;

3° *Déterminer celle de ces surfaces qui passe par la parabole*

$$x = 2a, \qquad z^2 = 2by;$$

4° *Déterminer les lignes de courbure de cette dernière surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3,$$

où t est un paramètre variable.

Exprimer en fonction de t l'arc de la courbe, le rayon de courbure, le rayon de torsion.

Montrer que la courbe peut être considérée comme une hélice tracée sur un certain cylindre.

(Novembre 1903.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *L'arête de rebroussement de toute surface développable circonscrite à une sphère est une ligne géodésique d'un cône concentrique à la sphère. C'est aussi la courbe que peut envelopper sur le cône une droite tangente à la fois au cône et à la sphère concentriques.*

Pour démontrer ces théorèmes on peut répondre aux questions suivantes :

1° *Déterminer par un coefficient angulaire m′ la position limite de l'intersection du plan tangent à l'origine et du plan tangent voisin en un point satisfaisant à la relation $y = mx$, la surface étant représentée par un développement en série entière de la forme*

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots.$$

2° *Traiter le cas où la surface est développable;*

3° *L'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à une sphère de rayon* R *est une courbe* C *dont les tangentes touchent la sphère;*

4° *Si l'on prend l'origine des coordonnées rectangulaires au centre de la sphère, la courbe* C *satisfait à l'équation différentielle*

$$(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2$$
$$= R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

5° *Une ligne géodésique d'un cône ayant son sommet à* *l'origine satisfait à la même équation différentielle, où* R *a une valeur convenablement choisie;*

6° *Conclusion.*

SOLUTION.

La cinquième question offre seule de l'intérêt.

La normale principale d'une géodésique est perpendiculaire au plan tangent au cône, et par suite à la génératrice du point de contact. On a donc

$$\Sigma x\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

ou

$$d\Sigma x \frac{dx}{ds} = ds.$$

On tire de là

$$\Sigma x \frac{dx}{ds} \frac{d}{ds} \Sigma x \frac{dx}{ds} = \Sigma x \frac{dx}{ds},$$

d'où, en appelant R^2 une constante,

$$(\Sigma x\, dx)^2 = (\Sigma x^2 - R^2)\, ds^2$$

et par suite

$$\Sigma (y\, dz - r\, dy)^2 = R^2 \Sigma\, dx^2.$$

On peut aussi montrer géométriquement que l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à une sphère est une géodésique du cône concentrique (*voir* SALMON, *Géométrie à trois dimensions, familles de surfaces*, n° 450).

Une autre démonstration géométrique repose sur ce fait que la parallèle à la normale principale de l'arête de rebroussement, menée par le point où la génératrice de la développable touche la sphère, est dans le plan tangent à la sphère.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - z,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y - z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 3x - 3y - z.$$

(Novembre 1903.)

Lille.

Épreuve écrite. — 1° *Établir les propriétés générales des fonctions méromorphes doublement périodiques qui se rapportent à leurs zéros et à leurs pôles. Conséquences immédiates de ces propriétés.*

2° *Soient* MN *et* MT *la normale et la tangente en un point* M *d'une courbe plane, limitées à l'axe* Ox. *Déterminer toutes les courbes* C *pour lesquelles on a*

$$\text{ON} \times \text{OT} = k^2,$$

k désignant une constante.

Chercher les trajectoires orthogonales Γ *des courbes obtenues.*

En un point de coordonnées positives x_0, y_0 passent une branche de courbe C *et une branche de courbe* Γ *qui limitent une aire plane; calculer cette aire en fonction de x_0 et y_0.*

Solution.

L'équation du problème est

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(x + yy') = k^2.$$

Si l'on prend comme nouvelle fonction $u = x^2 + y^2 + k^2$, x restant la variable, cette équation devient

$$2uu' = (u'^2 + 4k^2)x;$$

elle rentre dans le type de Lagrange. Par différentiation, on obtient

$$\frac{du'}{dx} = \frac{u'}{x}.$$

Les courbes C ont pour équation :

$$x^2 + y^2 + k^2 = ax^2 + \frac{k^2}{a} \qquad (a \text{ const. arbitraire}).$$

Les courbes Γ coïncident avec les courbes C. Par un point du plan (x_0, y_0) passent deux courbes de la famille limitant une boucle dont l'aire est aisée à calculer.

(Juillet 1903.)

Épreuve écrite. — 1° *Les fonctions* φ, ψ *étant supposées continues et dérivables par rapport aux deux variables* x, y, *sous quelles conditions l'intégrale*

$$\int (\varphi + i\psi)(dx + i\,dy),$$

prise le long d'un contour fermé, sera-t-elle indépendante de ce contour?

2° *Lorsque cela aura lieu, quelle sera la propriété correspondante de la variable complexe* $\varphi + i\psi$ *considérée comme fonction de la variable* $x + iy$?

3° *Quelle sera la propriété correspondante du système de coordonnées curvilignes défini par les deux équations*

$$\varphi(x, y) = \text{const.}, \qquad \psi(x, y) = \text{const.}?$$

4° *Quelle sera la propriété correspondante de la transformation géométrique définie par les deux équations*

$$X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y)?$$

5° *Une courbe plane étant définie par les deux équations*

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha),$$
$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f(\alpha),$$

déterminer la fonction $f(\alpha)$ *de telle sorte que le rayon de courbure* $\dfrac{ds}{d\alpha}$ *soit inversement proportionnel au rayon vecteur* $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Solution.

L'équation du problème est

$$(f'' + f)\sqrt{f^2 + f'^2} = k.$$

Elle admet comme intégrale première

$$(f^2 + f'^2)^{\frac{3}{2}} = 3kf + a \qquad (a \text{ const. arbitraire} .$$

Une quadrature donne α en fonction de f

$$\alpha = \int \frac{df}{\sqrt{(3kf + a)^{\frac{2}{3}} - f^2}},$$

en posant $3kf + a = u^3$, on obtient

$$\alpha = \int \frac{3u^2\,du}{\sqrt{(u^3 + 3ku - a)(-u^3 + 3ku - a)}},$$

quadrature hyperelliptique. Pour la discussion de la forme des courbes correspondantes parmi lesquelles figure comme cas très particulier la lemniscate, consulter : TISSERAND et PAINLEVÉ, *Exercices d'Analyse*, p. 327. (Novembre 1903.)