

A. VACQUANT

**Agrégation des sciences mathématiques
(concours de 1903). Solution de la question
de mathématiques spéciales**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 117-130

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__117_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS
DE 1905). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES;**

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On considère une droite fixe A et deux droites fixes B et B' qui rencontrent A mais qui ne sont pas situées dans un même plan.

On sait que si l'on considère une surface du second ordre S qui passe par les trois droites A, B et B', son centre C est situé dans le plan P parallèle aux droites B et B' et équidistant de ces deux droites.

1° Lorsque le centre C décrit une droite dans le plan P, la surface S passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur B et B';

2° Lorsque le point C décrit, dans le plan P, une courbe (Γ) de classe m, la surface S enveloppe une surface réglée Σ d'ordre $2m$ et, par chacune des trois droites A, B et B', il passe m nappes de cette surface Σ .

Montrer que la surface Σ peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites B et B' et en restant tangente à un

cylindre de classe m dont les génératrices sont parallèles à A. Trouver l'équation de ce cylindre ;

3° *Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique, la surface Σ est du quatrième ordre et admet la droite A comme droite double.*

Tout plan passant par A coupe alors cette surface, en dehors de A, suivant une conique ; trouver le lieu du centre de cette conique.

Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique (Γ) est tangente soit au plan déterminé par les droites A et B, soit au plan déterminé par A et B', soit à ces deux plans à la fois ?

NOTA. — *Les candidats devront traiter le problème par la Géométrie analytique : il leur sera tenu compte des remarques géométriques.*

I. — SOLUTION ANALYTIQUE.

La droite A sera prise pour axe des z ; l'origine des coordonnées sera le milieu O du segment $B_1 B'_1 = 2c$ déterminé sur A par les droites B et B' ; les axes Ox, Oy seront les parallèles aux droites B, B' menées par O, de sorte que les équations des droites A, B, B' seront

$$(A) \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = c; \end{cases}$$

$$(B') \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = -c. \end{cases}$$

L'équation d'une quadrique passant par Oz est

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0.$$

Pour que cette quadrique passe par les droites B et B',

il faut

$$A = 0, \quad B'c + C = 0; \quad A' = 0, \quad -Bc + C' = 0.$$

L'équation d'une quadrique S passant par les droites A, B, B' est donc :

$$Byz + B'zx + B''xy - B'cx + Bcy = 0.$$

Le centre C d'une telle quadrique est défini par les équations :

$$B'z + B''y - B'c = 0,$$

$$Bz + B'x + Bc = 0,$$

$$By + B'x = 0.$$

En multipliant les deux membres de ces équations respectivement par B, B', $-B''$ et ajoutant, on obtient :

$$2BB'z = 0$$

ou

$$z = 0,$$

en supposant $BB' \neq 0$; ce qui prouve que le centre C de S est dans le plan xOy ou P parallèle aux droites B, B' et équidistant de ces droites. Les coordonnées x, y de C se déduisent des équations :

$$By + B'x = 0,$$

$$B''(By - B'x) - 2BB'c = 0,$$

ou, en supposant $B'' \neq 0$,

$$By + B'x = 0,$$

$$By - B'x = \frac{2BB'}{B''}c.$$

On en déduit, par addition et soustraction,

$$x = -\frac{B}{B'}c,$$

$$y = \frac{B'}{B}c.$$

L'hypothèse $BB'B'' \neq 0$ signifie que S n'est pas un parabolôïde; dans le cas du parabolôïde, C serait à l'infini; on peut supposer $BB'B'' \neq 0$.

En désignant par α et β les coordonnées du point C dans le plan xOy , on a

$$B = -\frac{B''\alpha}{c}, \quad B' = \frac{B''\beta}{c};$$

par suite l'équation de S devient, en y remplaçant B, B' par les valeurs précédentes, supprimant le facteur B'' et changeant les signes :

$$(S) \quad \alpha yz - \beta zx - cxy + c\beta x + c\alpha y = 0.$$

1° Si le point C décrit dans le plan xOy une droite D ayant pour équation

$$(D) \quad u_0x + v_0y + 1 = 0,$$

on aura :

$$u_0\alpha + v_0\beta + 1 = 0.$$

L'équation de S peut s'écrire

$$\alpha y(z + c) + \beta x(c - z) + (u_0\alpha + v_0\beta) cxy = 0,$$

ou

$$\alpha y(z + c + cu_0x) + \beta x(c - z + cv_0y) = 0.$$

On voit, sur cette équation, que la surface S passe par une quatrième droite fixe A' représentée par les équations

$$(A') \quad \begin{cases} z + c + cu_0x = 0, \\ c - z + cv_0y = 0, \end{cases}$$

et s'appuyant sur B et B'.

Le plan projetant la droite A' sur le plan xOy parallèlement à Oz a pour équation

$$(D') \quad u_0x + v_0y + 2 = 0.$$

Sa trace, sur le plan xOy , est une droite D' homothétique de D , le centre d'homothétie étant O , et le rapport d'homothétie de D' à D étant 2. Ainsi la droite A' s'obtiendra en joignant les points d'intersection H, H' du plan (D') avec les droites B et B' .

2° Supposons que le point C décrive dans le plan xOy une courbe (Γ) , de classe m , ayant pour équation en coordonnées tangentielles et homogènes

$$(\Gamma) \quad \varphi(u, v, w) = 0,$$

de degré m . Désignons par $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ l'équation de (Γ) en coordonnées ponctuelles homogènes. Pour trouver l'enveloppe de la surface S , il faut éliminer α, β, γ entre les équations :

$$(S) \quad \alpha y(z+c) + \beta x(c-z) - \gamma cxy = 0,$$

$$(1) \quad \frac{y(z+c)}{f'_\alpha} = \frac{x(c-z)}{f'_\beta} = \frac{-cxy}{f'_\gamma}.$$

Les deux dernières équations représentent une droite s'appuyant sur les droites B, B' ; l'enveloppe est donc une surface réglée Σ engendrée par cette droite; cela était à prévoir, car deux surfaces S ayant 3 droites communes A, B, B' en ont une quatrième s'appuyant, comme A , sur B et B' .

Or si l'on pose

$$u = y(z+c), \quad v = x(c-z), \quad w = -cxy,$$

pour trouver l'équation de Σ , on doit éliminer α, β, γ entre les équations :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

$$\frac{u}{f'_\alpha} = \frac{v}{f'_\beta} = \frac{w}{f'_\gamma},$$

et le résultat de l'élimination sera l'équation tangentielle

de la courbe (Γ) , savoir

$$\varphi(u, v, w) = 0.$$

Donc l'équation ponctuelle de Σ sera

$$(\Sigma) \quad \varphi[y(z+c), x(c-z), -cxy] = 0,$$

c'est-à-dire une surface d'ordre $2m$, passant par chacune des droites A, B, B'. Si l'on coupe Σ par un plan $z = h$ on obtient une courbe qui se projette en vraie grandeur sur le plan xOy parallèlement à Oz ; cette projection a pour équation

$$\varphi[y(h+c), x(x-h), -cxy] = 0,$$

de degré $2m$; les termes de moindre degré étant de degré m , le point de rencontre de A et du plan $z = h$ est un point multiple d'ordre m de la section; donc par la droite A, il passe m nappes de la surface Σ . On voit de même que par chacune des droites B, B' il passe m nappes de Σ .

L'équation $\varphi(u, v, w) = 0$ étant homogène, on voit que l'équation (Σ) peut s'écrire

$$\varphi\left(\frac{z+c}{-cx}, \frac{c-z}{-cy}, 1\right) = 0,$$

ou

$$\varphi(\lambda, \mu, 1) = 0,$$

en posant

$$\frac{z+c}{-cx} = \lambda, \quad \frac{c-z}{-cy} = \mu,$$

c'est-à-dire

$$(\Delta) \quad \begin{cases} z+c+\lambda cy = 0, \\ z-c-\mu cy = 0. \end{cases}$$

Ces équations représentent une droite Δ s'appuyant sur B et B'. La surface Σ est engendrée par cette droite Δ . La projection δ' de Δ sur xOy a pour équation

$$(\delta') \quad \lambda x + \mu y + 2 = 0.$$

Ses coordonnées sont

$$u' = \lambda, \quad v' = \mu, \quad w' = z.$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{2u'}{w'}, \quad \mu = \frac{2v'}{w'}.$$

Donc la droite δ' enveloppe une courbe ayant pour équation tangentielle

$$\varphi\left(\frac{2u'}{w'}, \frac{2v'}{w'}, 1\right) = 0,$$

ou

$$(\Gamma') \quad \varphi(2u', 2v', w') = 0,$$

ce qui montre que la droite Δ , génératrice de Σ , reste tangente à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz ou A et dont la base, dans le plan xOy , a pour équation tangentielle (Γ') , de degré m ; ce cylindre est donc de classe m . L'équation ponctuelle de ce cylindre est la même que l'équation ponctuelle de la courbe (Γ') ; or les courbes (Γ) et (Γ') sont homothétiques par rapport au point O , le rapport d'homothétie de (Γ') à (Γ) étant 2. Si

$$f(x, \beta) = 0$$

est l'équation ponctuelle de (Γ) en coordonnées non homogènes, celle du cylindre (Γ') sera

$$f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 0.$$

3° Si la courbe (Γ) est une conique ayant pour équation tangentielle

$$\varphi(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bv w + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

la surface Σ est du quatrième ordre et a pour équation

ponctuelle :

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} ay^2(c+z)^2 + a'x^2(c-z)^2 \\ + a''c^2x^2y^2 - 2bcx^2y(c-z) \\ - 2b'cx^2y^2(c+z) + 2b''xy(c-z)(c+z) = 0. \end{array} \right.$$

Cette surface Σ_1 admet les droites A, B, B' comme droites doubles et un plan ω

$$y - mx = 0,$$

passant par O z coupe Σ_1 , en dehors de A, suivant une conique (C_1) intersection du plan ω et du cylindre

$$\begin{aligned} am^2(c+z)^2 + a'(c-z)^2 \\ + a''c^2m^2x^2 - 2bcmx(c-z) \\ - 2b'cm^2x(c+z) + 2b''m(c-z)(c+z) = 0. \end{aligned}$$

Les équations du centre de cette conique sont

$$\begin{aligned} y - mx &= 0, \\ a''c^2m^2x - bcm(c-z) - b'c'b'cm^2(c+z) &= 0, \\ am^2(c+z) - a'(c-z) + bcmx - b'cm^2x - 2b''mz &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} y = mx, \\ a''cmx + (b - b'm)z = c(b + b'm), \\ cm(b - b'm)x + (am^2 - 2b''m + a')z = c(a' - am^2). \end{array} \right.$$

Ces équations permettent d'exprimer les coordonnées x, y, z d'un point du lieu en fonction du paramètre m ; en résolvant les deux dernières par rapport à x et z , on obtient :

$$x = \frac{c[(b + b'm)(am^2 - 2b''m + a') - (b - b'm)(a' - am^2)]}{cm[a''(am^2 - 2b''m + a') - (b - b'm)^2]},$$

ou

$$\begin{aligned} x &= \frac{b(2am^2 - 2b''m) + b'm(-2b''m + 2a')}{m[a''(am^2 - 2b''m + a') - (b - b'm)^2]}, \\ z &= \frac{c^2m[a''(a' - am^2) - (b^2 - b'^2m^2)]}{cm[a''(am^2 - 2b''m + a') - (b - b'm)^2]}. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par A, A', A'', B, B', B'' les coefficients de a, a', a'', b, b', b'' dans le développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire si l'on pose

$$\begin{aligned} A &= a'a'' - b^2, & A' &= aa'' - b'^2, & A'' &= aa' - b''^2 \\ B &= b'b'' - ab, & B' &= bb'' - a'b', & B'' &= bb' - a''b'', \end{aligned}$$

les équations du lieu s'écrivent :

$$(\sigma) \quad \begin{cases} x = \frac{-2Bm - 2B'}{A'm^2 + 2B''m + A}, \\ z = \frac{c(A - A'm^2)}{A'm^2 + 2B''m + A}, \\ y = mx. \end{cases}$$

Ces équations représentent une conique (σ) dont la projection sur le plan xOy , parallèlement à Oz , a pour équation

$$(\sigma_1) \quad A'y^2 + 2B''xy + Ax^2 + 2By + 2B'x = 0.$$

Or l'équation ponctuelle de (Γ) est

$$Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy = 0.$$

La conique (σ_1) est donc homothétique et concentrique à la conique (Γ) .

Pour $m = 0$, on a

$$y = 0, \quad x = -\frac{2B'}{A}, \quad z = c,$$

c'est-à-dire un point H_1 de la droite B se projetant sur xOy au deuxième point de rencontre h_1 de la conique (σ_1) avec Ox ; de même (σ) rencontre la droite B' au point H'_1 se projetant sur xOy au deuxième

point de rencontre H'_1 de (τ_1) avec Oy . Pour $m = -\frac{B'}{B}$ on a

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{c(AB^2 - A'B'^2)}{A'B'^2 - 2BB'B' + AB^2},$$

c'est-à-dire un point A_1 de la droite A . Le plan de la conique (σ) est défini par ces trois points H_1 , H'_1 et A_1 .

Si la conique (Γ) est tangente au plan (A, B) ou $y = 0$, elle est tangente à la droite $y = 0$ et l'on doit avoir $a' = 0$. Si la conique Γ est tangente au plan (A, B') ou $x = 0$, on aura

$$a = 0.$$

La surface Σ_1 se décompose, suivant l'un ou l'autre cas, dans

$$y = 0 \quad [\text{plan}(A, B)]$$

et une surface du troisième ordre

$$(\Sigma_2) \quad \begin{cases} ay(c+z)^2 + a''c^2x^2y - 2bcx^2(c-z) \\ - 2b'cxy(c+z) + 2b''x(c-z)(c+z) = 0, \end{cases}$$

ou dans

$$x = 0 \quad [\text{plan}(A, B')]$$

et une surface du troisième ordre

$$(\Sigma_3) \quad \begin{cases} a'x(c-z)^2 + a''c^2xy^2 - 2bcxy(c-z) \\ - 2b'cy^2(c+z) + 2b''y(c-z)(c+z) = 0. \end{cases}$$

Tout plan passant par A ,

$$y - mx = 0,$$

coupe Σ_2 ou Σ_3 suivant une conique dont le lieu des centres est encore une conique (σ) .

Si la conique (Γ) est tangente à la fois aux plans (A, B) et (A, B') on a en même temps

$$a' = 0, \quad a = 0.$$

La surface Σ_4 se décompose dans ces deux plans $y = 0$ et $x = 0$, et une quadrique

$$(\Sigma_4) \quad \begin{cases} a^2 c^2 xy - 2bcx(c-z) - 2b'cy(c+z) \\ + 2b''(c-z)(c+z) = 0. \end{cases}$$

Tout plan $y - mx = 0$ passant par la droite A coupe Σ_4 suivant une conique, car A n'est pas situé sur Σ_4 , et le lieu des centres de cette conique est encore une conique (σ). Dans ce cas, on peut ajouter que le plan de (σ) est le plan diamétral conjugué de la direction A dans la quadrique Σ_4 . Les droites B et B' appartiennent à cette quadrique. Le point A₁ se confond avec O.

II. — CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

On peut établir par la géométrie presque tous les résultats demandés.

1° Soit D la droite décrite par les centres des quadriques S, et D' l'homothétique de D, par rapport à O, le rapport d'homothétie de D' à D étant 2. La quadrique S admettant pour centre un point C de D passe par la droite A₁ symétrique de A par rapport à C; le plan (A₁, D') coupe S suivant une deuxième droite A' qui est fixe quand C varie, car le plan (A₁, D') qui passe par D' et qui est parallèle à A est fixe, et la droite A' passe par les points de rencontre H et H' de ce plan avec les droites B et B'.

2° Considérons la tangente δ en un point C de la courbe (Γ); quand C décrit δ , les surfaces S passent (1°) par une quatrième droite fixe Δ dont la projection sur xOy parallèlement à A est une droite δ' homothétique de δ par rapport à O, le rapport d'homothétie de δ' à δ étant 2; la droite δ' est tangente à la courbe (Γ) ho-

mothétique de (Γ) au point C' homologue de C . Quand le point C varie très peu sur Γ et vient en C_1 , la droite Δ varie très peu; les deux surfaces voisines S et S_1 ont deux génératrices voisines Δ et Δ_1 qui se confondent quand C_1 vient en C ; or, les deux quadriques S et S_1 passant par les droites fixes A, B, B' ont comme intersection variable une quatrième droite dont la position limite est Δ quand S et S_1 se confondent; donc l'enveloppe Σ des surfaces S est engendrée par la droite Δ rencontrant B et B' , et se projetant sur le plan P parallèlement à A suivant une tangente δ' à la courbe (Γ') , c'est-à-dire par la droite Δ rencontrant B, B' et restant tangente au cylindre dont les génératrices sont parallèles à A et qui a pour base la courbe (Γ') du plan xOy ou P . Les courbes (Γ) et (Γ') étant homothétiques sont de même classe m ; par suite, le cylindre (Γ') est aussi de classe m . De ce mode de génération de Σ , il résulte aisément que la section de Σ par un plan passant par A se compose de cette droite A comptée m fois et d'une courbe de degré m , ce qui montre que Σ est d'ordre $2m$. Le raisonnement est analogue à celui que nous allons indiquer dans le cas particulier $m = 2$.

3° Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique ($m = 2$), la surface Σ est une surface du quatrième ordre Σ_4 , car tout plan ω passant par Oz ou A la coupe en suivant une conique (γ) et la droite Oz qui doit être comptée comme double; en effet, un plan tangent δ' au cylindre (Γ') coupe le plan ω suivant une droite z, z' parallèle à Oz , et sur cette droite il y a deux points de la section et pas davantage, car par z, z' on peut mener deux plans tangents au cylindre (Γ') et dans chacun d'eux il y a une droite Δ . La droite Δ se confond avec zz' quand le plan tangent δ' passe par Oz , ce qui arrive deux fois; donc Oz est une droite double

de Σ_1 . Par un point H de la droite B , il passe deux génératrices Δ ; de même par un point H' de B' ; donc B et B' sont aussi des droites doubles de Σ_1 .

La trace OM du plan π sur xOy coupe (Γ') en m_1 et m_2 et $z_1 z'_1$ en m ; quand le point m en décrivant OM vient en m_1 ou m_2 , les droites $z_1 z'_1$ sont des tangentes parallèles à la conique (γ) aux points M_1 et M_2 ; le centre ω de cette conique est le milieu du segment $M_1 M_2$; donc le lieu de ω se projette sur xOy suivant le lieu du milieu ω_1 de $m_1 m_2$. Soit O' le centre de (Γ') . Les droites $O\omega_1$ et $O'\omega_1$ étant parallèles à deux diamètres conjugués de la conique (Γ') engendrent deux faisceaux homographiques et le lieu de ω_1 est une conique (σ_1) passant par O et O' ; les tangentes en ces points sont parallèles à la direction conjuguée de OO' dans la conique (Γ') ; par suite le centre de (σ_1) est le milieu O_1 de OO' , c'est-à-dire le centre de (Γ) . Les deux coniques (σ_1) et (Γ) sont homothétiques, car elles ont, en direction, les mêmes systèmes de diamètres conjugués $O\omega_1$, $O'\omega_1$. Donc la conique (σ_1) est concentrique et homothétique à la conique (Γ) . Sur toute génératrice du cylindre (σ_1) , projetant la courbe, lieu de ω , il n'y a qu'un point de ce lieu qui est par suite une conique (σ) rencontrant les droites B , B' aux points H_1 , H'_1 dont les projections sont les deuxièmes points de rencontre h_1 , h'_1 de (σ_1) avec Ox , Oy ; en effet, quand le plan π coïncide avec zOx , la conique (γ) devient la droite double B admettant pour centres tous ses points; et l'on peut dire, par continuité, que le point ω vient en H_1 , comme on l'a vu analytiquement. De même la conique (σ) passe par H'_1 .

Si la conique (Γ) est tangente au plan (Λ, B) et, par suite, à Ox , il en est de même de (Γ') . Par un point H de la droite B , on peut mener deux plans tangents au

cylindre (Γ') , mais l'un d'eux est toujours le plan zOx qui contient la droite Δ correspondante; l'autre plan tangent contient la deuxième droite Δ qui engendre une surface Σ_2 du troisième ordre admettant B' comme droite double, A et B comme droites simples. Dans ce cas la surface du quatrième ordre Σ_1 se décompose donc dans le plan (A, B) et la surface du troisième ordre Σ_2 .

De même si (Γ) est tangente à Oy , la surface du quatrième ordre Σ_1 se décompose dans le plan (A, B') et une surface du troisième ordre Σ_3 admettant B comme droite double, A et B' comme droites simples.

Enfin si (Γ) est tangente à la fois à Ox et Oy , la surface Σ_1 se décompose dans les plans (A, B) , (A, B') et une quadrique Σ_4 passant par les droites B, B' , mais ne passant pas par A . Dans ce cas la génératrice Δ de Σ_1 est une tangente au cylindre (Γ') s'appuyant sur les tangentes B et B' à ce cylindre.
