NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES REMOUNDOS

Sur une propriété des transcendantes de plusieurs variables indépendantes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 111-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__111_1>

[D4a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES TRANSCENDANTES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. GEORGES REMOUNDOS.

1. On sait le théorème classique de l'Algèbre sur les fonctions rationnelles des ν racines d'une équation algébrique

$$x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1} x + a_{\nu} = 0, \tag{1}$$

d'après lequel *une telle fonction symétrique des* ν *racines* $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu}$ *peut s'exprimer rationnellement à l'aide des coefficients* $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}, a_{\nu}$, *et inversement.*

Aussi, le théorème de Galois, qui est fondamental dans sa célèbre théorie, et pour la démonstration duquel on fait usage du précédent (*voir*, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. PICARD, t. III, p. 439).

Je me propose ici de démontrer un théorème analogue de l'analyse concernant les fonctions transcendantes et uniformes de plusieurs variables indépendantes, qui peut servir dans diverses circonstances.

Ce théorème est le suivant :

Toute fonction entière (uniforme et continue) et symétrique des ν racines $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ de l'équation (1) *s'exprime uniformément à l'aide des ν fonctions symétriques élémentaires $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, et inversement.*

En effet, une telle fonction étant développable en série, procédant suivant les puissances entières et positives de $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \\ &\quad = Q_0(x_1, \ldots, x_\nu) + Q_1(x_1, \ldots, x_\nu) + \ldots \\ &\qquad\qquad + Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

où $Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ désigne un polynome homogène et de degré n en $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Si $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ est symétrique par rapport à ces variables, il en sera de même de toutes les fonctions $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$; or, ces fonctions sont rationnelles et, d'après le théorème précédemment cité, elles peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$.

Ainsi, la fonction $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ sera mise sous la forme d'une série procédant suivant les puissances entières et positives de $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$; elle sera donc une fonction entière par rapport à ces quantités.

La réciproque est évidente.

La démonstration s'étend visiblement au cas où

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

est le quotient de deux transcendantes entières. Je pense que le théorème est vrai pour toute fonction uniforme

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

et il serait démontré aisément, si la théorie des fonctions de plusieurs variables était suffisamment développée.

2. D'une façon plus générale, le théorème peut s'énoncer :

Si $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ *est une fonction symétrique et holomorphe dans le voisinage d'un système de valeurs* $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_\nu = \alpha_\nu$, *elle sera une fonction* $\Sigma(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$ *aussi holomorphe dans le voisinage des valeurs correspondantes de* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ *et inversement.*

En s'appuyant sur ce théorème, on établira le théorème suivant qui est une extension aux fonctions transcendantes de celui de Galois et se démontre de la même façon :

Toute transcendante de $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ *holomorphe dans le voisinage d'un système de valeurs* $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_\nu = \alpha_\nu$ *et invariable pour les substitutions du groupe de Galois attaché à l'équation* (1) *est holomorphe aussi de* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ *dans le voisinage des valeurs correspondantes.*

D'une façon plus précise, elle est holomorphe dans le voisinage de valeurs correspondantes de $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$, si ces lettres désignent les variables indépendantes dont $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ dépendent. Nous supposons, bien entendu, que $\mu < \nu$ pour que l'*affect* (d'après une expression de Kronecker) ne soit pas nul.

La réciproque est évidente.