

J. SADIÉ

Sur un problème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 109-111

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__109_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[C1f]

SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. J. SADIÈR.

Prouver que pour toutes les valeurs réelles et positives de la variable x l'expression $y = \frac{x^a - x^{1-a}}{x-1}$, dans laquelle on a $0 < a < 1$, peut être représentée par

$$(2a-1)\theta \quad (0 < \theta < 1).$$

Cette question, posée dans le *Journal de Mathématiques spéciales* sous le n° 260, est reproduite au n° 503 des questions d'Algèbre de M. Laisant (*Recueil de probl. de math.*, t. III).

Une solution a été donnée (*J. S.*, 1896, p. 44). Elle est insuffisante : on y démontre l'existence d'un maximum (ou minimum, suivant le signe de $2a-1$) et les valeurs 0 pour $x=0$ et $x=\infty$. On n'y prouve pas que y reste toujours compris dans l'intervalle limité par ces deux racines.

Pour abréger l'écriture posons

$$b = 1 - a, \quad c = a - b \quad (a + b = 1; a \text{ et } b > 0).$$

On a

$$(x-1)y = x^a - x^b,$$

d'où l'on déduit

$$x(x-1)^2 y' = (ax+b)x^b - (bx+a)x^a.$$

Soit V le second membre :

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = 1.$$

Prouvons que V ne s'annule pour aucune autre valeur de x . Nous allons pour cela résoudre l'équation

$$\frac{ax+b}{bx+a} = x^c,$$

en laissant de côté la racine $x=0$, qui d'ailleurs n'annule pas la dérivée.

Les racines de cette équation sont données par les points d'intersection des deux courbes

$$y_1 = \frac{ax+b}{bx+a}, \quad y_2 = x^c \quad (1).$$

La première est une hyperbole équilatère; la seconde appartient à la famille des courbes paraboliques, dont l'équation est de la forme

$$y = x^m.$$

Nous avons deux cas à distinguer : $c > 0$ et $c < 0$.

(A) : $c > 0 (a > b)$; y_1 croît constamment de $\frac{b}{a}$ à $\frac{a}{b}$ lorsque x croît de 0 à ∞ , et y_2 croît constamment de 0 à ∞ . Les deux branches de courbe, sans point d'inflexion, se coupent en un seul point d'abscisse $x = 1$.

(B) : $c < 0 (a < b)$; y_1 décroît constamment de $\frac{b}{a}$ à $\frac{a}{b}$ et y_2 de ∞ à 0; la courbure, comme dans le cas précédent, ne change pas de sens.

Donc, dans les deux cas, V n'a qu'un changement de signe pour $x = 1$.

Cette discussion est résumée dans les deux Tableaux

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

suivants :

$$\begin{array}{l}
 \text{A) : } c > 0 \\
 \text{(B) : } c < 0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 x \\
 y' \\
 y
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 0 \\
 + \\
 0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 1 \\
 0 \\
 \text{croît}
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 \infty \\
 - \\
 c
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 \\
 \text{décroit} \\
 \text{(max.)}
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right. , \\
 \\
 \begin{array}{l}
 x \\
 y' \\
 y
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 0 \\
 - \\
 0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 1 \\
 0 \\
 \text{décroit}
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 \infty \\
 + \\
 c
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 \\
 \text{croît} \\
 \text{(min.)}
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right. .
 \end{array}
 \right.$$

Donc y reste compris entre 0 et c , lorsque x croît de 0 à $+\infty$. Donc

$$y = c\theta = (a - b)\theta = (2a - 1)\theta. \quad \text{Q. E. D.}$$