

G. FONTENÉ

## Sur un système articulé gauche

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1904), p. 105-108

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_\\_105\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__105_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[R1e]

SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ GAUCHE;

PAR M. G. FONTENÉ.

---

Dans un précédent Mémoire <sup>(1)</sup> (*Nouvelles Annales*, décembre 1903 et janvier 1904) j'ai étudié le cas le plus remarquable du système articulé de M. Kempe, système dont les éléments sont des plaques triangulaires, susceptibles de dégénérer en de simples tiges. Je montrerai ici que, dans ce dernier cas, on peut substituer au système plan, qui a *un* paramètre de déformation, un système gauche ayant *deux* paramètres de déformation. Je conserve les notations du Mémoire cité.

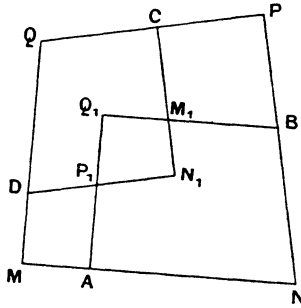
1. Considérons (*fig. 1*) deux quadrilatères gauches articulés QPNM, QCN<sub>1</sub>D, les tiges QP et QC restant confondues en direction, ainsi que les tiges QM et QD; si l'on relie par une tige deux points B et M<sub>1</sub> fixes sur PN et CN<sub>1</sub>, dans la déformation à deux paramètres du système obtenu, un certain point A de la tige MN et un certain point P<sub>1</sub> de la tige DN<sub>1</sub> resteront à une distance constante l'un de l'autre. Les points A et P<sub>1</sub> sont déterminés par les conditions suivantes : les points A, B, C, D sont dans un même plan, ainsi que les points M, P<sub>1</sub>, M<sub>1</sub>, P. Je suis arrivé à ce résultat en considérant le triangle QNN<sub>1</sub>.

---

(1) Voir t. III, 1903, p. 529.

Il est facile de voir que les droites  $BM_1$  et  $AP_1$  se rencontrent en un point  $Q_1$ , et que ce point est fixe

Fig. 1.



sur les tiges  $BM_1$  et  $AP_1$ ; les quatre points  $N$ ,  $Q_1$ ,  $N_1$ ,  $Q$  sont d'ailleurs dans un même plan.

On peut dire :

*Si l'on considère dans l'espace huit tiges*

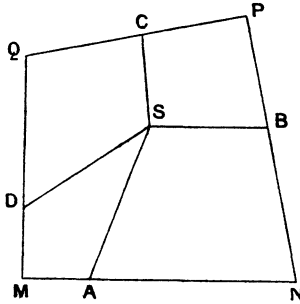
$$\begin{array}{cccc} AMN, & BQ_1M_1, & CPQ, & DN_1P_1, \\ GM_1N_1, & DQM, & AP_1Q_1, & BNP, \end{array}$$

*formant deux tétrades et quatre couples, telles que deux tiges qui n'appartiennent ni à une même tétrade ni à un même couple sont articulées entre elles, le système est déformable avec deux paramètres sous une condition unique : les points d'articulation  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  des deux quadrilatères  $MNPQ$ ,  $M_1N_1P_1Q_1$  doivent être dans un même plan, auquel cas il en est de même des points d'articulation des deux quadrilatères  $M_1AP_1D$  et  $M_1CPB$ , et de ceux des deux quadrilatères  $NAQ_1B$  et  $N_1CQD$ .*

On aurait trois points  $I$ ,  $J$ ,  $K$  analogues à ceux de la figure 10 du Mémoire cité.

2. Les quatre points  $M_1, N_1, P_1, Q_1$  peuvent être confondus en un même point  $S$  (*fig. 2*); la théorie de

Fig. 2.



l'appareil est alors très simple, et si l'on pose

$$\begin{aligned} MN &= a, & NB &= b, & \dots, \\ \frac{MA}{AN} &= \frac{m}{n}, & \frac{NB}{BP} &= \frac{n}{p}, & \dots, \\ SA &= \alpha, & SB &= \beta, & \dots, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \alpha^2 \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) - \beta^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right) + \dots - \dots \\ + \left( \frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \dots - \dots \right) = 0. \end{aligned}$$

3. En conservant le point  $S$ , les quatre points  $A, B, C, D$  peuvent être à un cercle; la déformation du contour  $MNPQ$  les maintient sur un cercle, car, si l'on fait varier le dièdre  $MP$  sans modifier la longueur  $MP$ , en appelant  $J$  le point où  $AB$  et  $DC$  coupent  $MP$ , on a

$$JA \cdot JB = JC \cdot JD.$$

Comme on peut avoir alors  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ , on a

$$\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \frac{c^2}{p+q} - \frac{d^2}{q+m} = 0.$$

Si l'on regarde  $m + n$ ,  $n + p$ ,  $p + q$  comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace, cette équation représente un cône du troisième ordre; ce cône a une génératrice double dans l'hypothèse

$$c + a = d + b (= l),$$

c'est-à-dire lorsque le contour MNPQ est circonscriptible à des sphères, et l'on a pour la génératrice double

$$\frac{m+n}{a} = \frac{n+p}{b} = \frac{p+q}{c} = \frac{q+m}{d}.$$

Si l'on adopte pour  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  des valeurs remplissant ces conditions, ce qui laisse un paramètre pour le système des points d'attache A, B, C, D, on a

$$NA = NB, \quad PB = PC, \quad \dots;$$

on obtient les systèmes de points A, B, C, D en donnant au contour une forme déterminée, et en considérant les sphères qui touchent les quatre côtés : le lieu des centres de ces sphères est une droite, axe commun des cercles ABCD; en prenant pour S un point de cet axe, on aura

$$SA = SB = SC = SD,$$

les points d'attache A, B, C, D étant tels qu'on l'a dit.

NOTE. — *Pourrait-on, avec des tétraèdres, obtenir un système articulé comparable au système plan de Kempe? C'est une question que je ne puis étudier, faute de temps, et dont je serais heureux d'avoir provoqué la solution.*

---