C.-A. LAISANT

Rayon de courbure d'une courbe plane. Remarques et constructions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 8-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__8_1>

[O2e]

RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE. REMARQUES ET CONSTRUCTIONS;

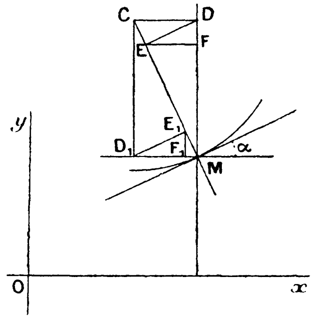
PAR M. C.-A. LAISANT.

1. On connaît l'expression $\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ de la courbure d'une courbe plane, rapportée à des coordonnées rectangulaires, en un point $M(x, y)$ (*fig.* 1). En appelant α l'angle d'inclinaison de la tangente en M sur l'axe des x, on peut écrire

$$\frac{1}{R} = y'' \cos^3\alpha \qquad \text{ou} \qquad R\cos^3\alpha = \frac{1}{y''}.$$

Si donc on projette le centre de courbure C en D, sur l'ordonnée de M, puis D en E sur la normale, puis E en F sur l'ordonnée, le segment MF représentera l'expression $\frac{1}{y''}$. Réciproquement, si l'on connaît y'', on pourra construire le segment MF, et l'on obtiendra C par la

Fig. 1.



construction inverse, c'est-à-dire en menant FE parallèle à Ox jusqu'à la normale, ED parallèle à la tangente jusqu'à l'ordonnée, et DC parallèle à Ox jusqu'à la normale.

Il est aisé de voir qu'on a aussi, en tenant compte des signes,

$$R \sin^3 \alpha = -\frac{1}{x''},$$

la notation x'' représentant $\frac{d^2x}{dy^2}$. Donc la construction des droites CD_1, D_1E_1, E_1F_1, analogue à la précédente, donnera en MF_1 l'expression géométrique de $\frac{1}{x''}$; et réciproquement, si l'on connaît x'', la construction inverse donnera C.

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$x_0 = x + \frac{1}{x'' \sin^2 \alpha}, \qquad y_0 = y + \frac{1}{y'' \cos^2 \alpha}.$$

On vérifie en outre les relations, d'ailleurs bien connues,

$$x'' \operatorname{tang}^3 \alpha + y'' = 0, \qquad x'' + y'' \cot^3 \alpha = 0,$$

et l'on obtient aussi très aisément, en considérant le triangle MCD, l'expression symétrique suivante du rayon de courbure, qui est peut-être nouvelle :

$$R = \left[\left(\frac{1}{x''}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{y''}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Ces remarques permettent donc :

Connaissant le rayon de courbure et la normale, de construire les deux dérivées secondes x'', y'' ;

Connaissant l'une des dérivées secondes et la normale, de construire l'autre dérivée seconde et le rayon de courbure ;

Connaissant les deux dérivées secondes, de calculer le rayon de courbure et la direction de la normale (mais non de construire ces éléments avec la règle et le compas).

Il serait facile d'appliquer ces considérations aux rayons de courbure d'un grand nombre de courbes, et en particulier aux paraboles d'ordre quelconque,

$$y = f(x),$$

$f(x)$ étant un polynome entier ; dans ce cas on trouve des résultats remarquablement simples. Mais, pour abréger, nous nous bornons à cette simple indication.

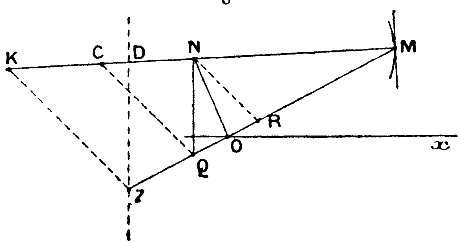
On remarquera enfin qu'une courbe étant donnée, si on la rapporte à un système quelconque d'axes rectangulaires, et si l'on fait tourner ces axes, l'extrémité F du segment $MF = \frac{1}{y''}$ porté sur l'ordonnée décrit une courbe définie par l'équation polaire $MF = R \cos^3 \theta$. Il en est de même pour le lieu décrit par F_1 extrémité de $MF_1 = \frac{1}{x''}$.

2. Une construction du même genre, bien que moins intuitive, peut être obtenue pour le cas des coordonnées polaires. On sait en effet qu'alors le rayon de courbure R est donné par la formule

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \tag{1}$$

Soient (*fig.* 2) Ox l'axe polaire, M le point consi-

Fig. 2.



déré, C le centre de courbure, ON la sous-normale, NQ une perpendiculaire à NM; soient enfin, sur le rayon vecteur OM, ZO égal à la dérivée seconde r'' fournie par l'équation, et $QR = ZQ$.

On a

$$OM = r, \qquad ON = r', \qquad NM = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$QO = \frac{r'^2}{r}, \qquad QM = \frac{r^2 + r'^2}{r}, \qquad CM = R,$$

$$QR = ZQ = ZO - QO = r'' - \frac{r'^2}{r}.$$

Dès lors, la relation (1) peut s'écrire

$$CM = \frac{NM^3}{NM^2 + OM.QO - OM.ZO},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{NM}} = \frac{\mathrm{NM}^2}{\mathrm{OM}} \frac{1}{\mathrm{QM}+\mathrm{QO}-\mathrm{ZO}} = \frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{QM}-\mathrm{ZQ}}$$
$$= \frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{QM}-\mathrm{QR}} = \frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{RM}}.$$

Les deux triangles MCQ, MNR sont donc semblables, c'est-à-dire que les droites CQ, NR sont parallèles. On peut encore remarquer que la parallèle ZK à ces deux droites coupe la normale en un point K tel que le milieu du segment KN est le centre de courbure C.

La construction qui précède permet, soit d'obtenir le centre de courbure quand on a la dérivée seconde, soit de construire cette dérivée seconde ZO lorsqu'on connaît, au point correspondant M, le centre de courbure.

Il est évident qu'en tout ceci la direction de l'axe polaire Ox n'intervient en rien. Mais si l'on se donne une courbe entièrement déterminée, et qu'on veuille la rapporter à un système de coordonnées polaires, la position de l'origine O importera beaucoup.

Supposons d'abord qu'on connaisse à la fois la normale $\mathrm{MN} = n$ et le rayon de courbure $\mathrm{MC} = \mathrm{R}$. Alors, l'origine se déplacera sur un cercle de diamètre NM. En outre, en posant $\mathrm{OMN} = \omega$, on aura

$$\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{MQ}} = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MC}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{MZ}}{n}\cos\omega = \frac{2\mathrm{R}-n}{\mathrm{R}},$$

de sorte que le point Z décrit une droite ZD parallèle à la tangente.

La dérivée seconde ZO est donc représentée par le segment intercepté sur une sécante MOZ par le cercle et la droite ZD, lorsque cette sécante tourne autour du point M.

Quand le point O varie sur la droite MO, alors ω est constant, et n variable; on a toujours la relation

$$MZ = \frac{n}{\cos\omega}\left(2 - \frac{n}{R}\right),$$

qui montre comment sont liées les variations des points Z et N sur le rayon vecteur et la normale.

Un cas particulier intéressant est celui où l'origine est située sur la normale, qui coïncide alors avec le rayon vecteur; dans ce cas, les points O, N, Q coïncident, OR représente la dérivée seconde, OM est moyenne proportionnelle entre CM et RM, en sorte qu'on a

$$R = \frac{r^2}{r - r''},$$

résultat qui se déduit d'ailleurs immédiatement de l'expression générale, en y faisant $r' = 0$, et qui est d'une construction aussi simple que possible.