Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 89-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__89_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1916.

(1901, p. 336.)

Le sommet A *d'un triangle* ABC *et le pied* H *de la hauteur issue de* A *sont fixes. Les autres sommets* B *et* C *sont tels que* $\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \text{const}$.

1° *Le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points du triangle* ABC *parcourent chacun une parabole;*

2° *L'axe radical de ces deux cercles enveloppe une conique.* (BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. E. LUGARO.

Prenons pour axe des x, BC et pour axe des y AH.

Soient o, a; b, o; c, o les coordonnées respectives des trois points A, B, C. On a

$$b^2 + c^2 = \text{const.} = 2k^2.$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, dont les coordonnées sont $x = \frac{b+c}{2}$, $y = \frac{a^2+bc}{2}$, se déplace sur une parabole dont l'équation est $x^2 = ay - \frac{a^2-k^2}{2}$.

Le centre du cercle de neuf points ayant pour coordonnées

$$x = \frac{b+c}{4}, \qquad y = \frac{a^2-bc}{4a},$$

se déplace sur une partie de la parabole dont l'équation est

$$x^2 = -\frac{a}{2}y + \frac{a^2+k^2}{8}.$$

Les équations des deux cercles considérés sont respectivement

$$a(x^2+y^2)-a(b+c)x-(a^2+bc)y+abc=0,$$
$$2a(x^2+y^2)-a(b+c)x-(a^2-bc)y \qquad =0,$$

Leur axe radical, dont l'équation est

$$a(b+c)x+(a^2+3bc)y-2abc=0,$$

enveloppe une partie de la courbe conique dont l'équation est

$$(1)\quad 2a^4u^2-4a^2k^2v^2-2a(6k^2-a^2)v-3(3k^2-a^2)=0$$

en tangentielles, ou

$$(1)\quad a^2x^2+6(3k^2-a^2)y^2-4a(6k^2-a^2)y+8a^2k^2=0,$$

en coordonnées de points.

L'un des axes de symétrie de cette conique est l'axe des y, l'autre la droite d'équation

$$y=\frac{a(6k^2-a^2)}{3(3k^2-a^2)}.$$

Les sommets ont les points $\left(0, \dfrac{3ak^2}{3k^2-a^2}\right)$ et $\left(0, \dfrac{2}{3}a\right)$; ce dernier n'appartient pas à l'enveloppe.

Dans le cas de $3k^2>a^2$, l'équation (1) représente une ellipse et l'enveloppe est constituée par la portion de celle-ci comprise entre les droites

$$y=\frac{2ak^3}{3k^2-a^2} \qquad \text{et} \qquad y=\frac{6ak^2}{9k^2-a^2}.$$

Si l'on a $3k^2<a^2$, l'équation (1) représente une hyperbole et l'enveloppe est constituée par la partie de celle-ci se trouvant dans celle des deux régions limitées par les droites susdites, qui ne renferme pas le point $\left(0, \dfrac{2}{3}a\right)$. Finalement, si $3k^2=a^2$, l'équation (1) représente une parabole, et l'enveloppe est constituée par la portion de celle-ci comprise entre la droite de l'infini et la droite $y=a$.

Autres solutions par MM. Couvert, Frizac et Lez.

1919.

(1902, p. 44.)

Le produit du rayon de courbure en un point d'une conique par le cube de la distance du centre à la tangente correspondante est constant pour tous les points de la conique.

COROLLAIRE. — *Les centres de courbure répondant aux points de déviation maxima d'une ellipse sont les projections du centre sur les normales en ces points.*

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. S. CHASSIOTIS.

Soit l'équation

$$Ax^2 + Cy^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

de la conique; différentions-la par rapport à x deux fois successivement, nous aurons

$$Ax + Cyy' = 0, \tag{2}$$

$$A + Cy'^2 + Cyy'' = 0; \tag{3}$$

en éliminant y' entre les équations (2) et (3), on a

$$\frac{A(Ax^2 + Cy^2)}{Cy^2} + Cyy'' = 0,$$

qui s'écrit à cause de (1),

$$y^3 y'' = -\frac{A}{C^2}. \tag{4}$$

Soient R le rayon de courbure en un point; d la distance de la tangente à la conique à son centre; formons, Rd^3, nous aurons

$$Rd^3 = -\frac{(y - xy')^3}{y''} \tag{5}$$

ou

$$y - xy' = y + \frac{Ax^2}{Cy} = \frac{Ax^2 + Cy^2}{Cy} = -\frac{1}{Cy},$$

d'où

$$R d^3 = -\frac{1}{C^3 y^3 y''} = -\frac{1}{C^3}\,\frac{-C^2}{A} = +\frac{1}{AC} = \text{const.};$$

on a donc bien en tous les points de la conique

$$(6) \qquad R d^3 = +\frac{1}{AC} = a^2 b^2,$$

en désignant par a et par b les demi-axes de la conique.

C. Q. F. D.

Pour démontrer le corollaire, faisons dans l'égalité (6) $R = d$, on a alors

$$(7) \qquad R = \pm\sqrt{ab};$$

et l'on reconnaît là les rayons de courbure des points de déviation maximum, ainsi que l'a démontré M. M. d'Ocagne (*Nouv. Ann.*, 1886, p. 377).

La propriété signalée dans cette question n'appartient pas aux coniques seulement.

Proposons-nous en effet de :

Trouver toutes les courbes planes telles que le rayon de courbure R *et la distance* d *de l'origine des coordonnées à la tangente en un point* M *de la courbe soient liés par la relation*

$$R\,d^3 = \frac{k^2}{4} = \text{const.}$$

La solution de ce problème est très simple en coordonnées tangentielles polaires. Soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0,$$

une tangente à la courbe, on a

$$R = p + p'', \qquad d = p(\alpha),$$

d'où l'équation du problème

$$p^4 + p^3 p'' = \frac{k^2}{4},$$

qui s'intègre facilement et l'intégrale est de la forme

$$p^2 = a \cos\alpha + b \sin\alpha + c.$$

Autres solutions par MM. BARISIEN et FRIZAC.

1931.

(1902, p. 288.)

Lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et tangentes à une conique fixe. (ALPHA.)

1933.

(1902, p. 336.)

Lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites et passant par un point fixe. (ALPHA.)

SOLUTIONS

Par M. R. GILBERT.

Une transformation tangentielle de seconde classe fait correspondre à un point, M, une conique, μ, inscrite au triangle fondamental OAB. On peut, par un choix des coordonnées, écrire l'équation tangentielle de cette conique

$$avw + bwu + cuv = 0,$$

a, b, c désignant les coordonnées du point M rapporté au triangle ABC.

Cela étant :

1° Considérons une droite fixe, D, (u_0, v_0, w_0). Son pôle, M', par rapport à μ est

$$\left|\begin{aligned} x &= bw_0 + cv_0, \\ y &= cu_0 + aw_0, \\ z &= av_0 + bu_0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent que M′ correspond à μ dans une transformation quadratique tangentielle.

En particulier, si D est la droite de l'infini, M′ est le centre de μ. D'après cela on obtient facilement les résultats suivants :

Si μ est tangente à une droite fixe, M′ décrit une droite.

Si μ passe par un point fixe, M′ décrit une conique.

Si μ est tangente à une conique fixe, M′ décrit une courbe de quatrième classe à trois tangentes doubles. Si la conique donnée est tangente à deux côtés du triangle OAB, M′ décrit une conique, etc.

2° Considérons deux points fixes P, Q, sur le côté AB; leur équation tangentielle est

$$(1) \qquad \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 = 0,$$

Les coordonnées du point de rencontre M″ des tangentes menées de P, Q à la conique a sont données par l'identification de l'équation (1) avec la suivante

$$(av + bu)(ux + vy) - czuv = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{bx + ay - cz}{2\beta} = \frac{ax}{\alpha} = \frac{by}{\gamma}.$$

Ces équations montrent que M″ correspond à M dans une transformation ponctuelle quadratique dont les pôles sont O, P, Q.

En particulier, supposons que P et Q soient les points cycliques; la conique μ est une parabole de foyer M″. On obtient facilement d'après cela les résultats suivants :

Si M décrit une droite, les paraboles μ sont tangentes à trois droites fixes, M″ décrit un cercle.

Si M décrit une conique C, tangente à OA, OB, les paraboles μ sont tangentes à une conique Γ, tangente à OA, OB, et M″ décrit une courbe du quatrième ordre, C″, ayant trois points doubles en O, P, Q.

En particulier, si C est une parabole, Γ se réduit à un point (outre le point O) et C″ a un rebroussement en O.

Si M décrit une parabole C quelconque, les paraboles μ sont tangentes à une courbe de troisième classe, Γ tangente à OA, OB et tangente double à la droite de l'infini; le point M″ décrit une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles en P, Q et un rebroussement en A.

Les résultats obtenus ci-dessus se modifient facilement lorsque les deux côtés OA, OB viennent à se confondre. La conique μ est alors tangente à une droite fixe en un point fixe. On trouve par exemple que le lieu des foyers d'une parabole tangente à une conique en un point fixe et en un point variable est une podaire de parabole, etc.

Autres solutions : Question 1931 par M. Frizac; question 1933 par MM. Audibert, Barisien, Couvert, Frizac.