Nouvelles annales de mathématiques

Solution de la question de mécanique rationnelle proposée en 1902 au concours d'agrégation des sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 74-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__74_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE PROPOSÉE EN 1902 AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR UN ANONYME.

I. *Un corps homogène pesant de révolution est suspendu par un point* O *de son axe : étudier son mouvement, sachant que l'axe est assujetti par une liaison sans frottement à rester dans un plan* P *passant par la verticale du point* O *et tournant autour de cette verticale avec une vitesse angulaire constante* ω. *Dans quelles conditions le mouvement relatif du corps par rapport au plan* P *se réduit-il à une rotation permanente autour de son axe?*

I. Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1, trois axes rectangulaires fixes passant par O, Oz_1 étant dirigé suivant la verticale ascendante.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires inva-

---

(1) SUCHAR, *Sur un exemple de transformation corrélative en Mécanique* (*Comptes rendus*, 27 octobre 1902).

riablement liés au corps et orientés comme les précédents, Oz étant l'axe de révolution du corps. Ox, Oy, Oz sont trois axes principaux d'inertie pour le corps, relativement au point O, et si A, B, C sont les moments d'inertie correspondants, on a

$$A = B.$$

La position du corps dans l'espace est complètement définie par la connaissance des angles d'Euler ψ, φ, θ comptés comme d'habitude; OI étant l'intersection des plans Oxy et Ox_1y_1, on a

$$\psi = \widehat{Ox_1, OI}, \qquad \varphi = \widehat{OI, Ox}, \qquad \theta = \widehat{Oz_1, Oz}.$$

Ici d'ailleurs, le plan z_1Oz tournant autour de Oz avec la vitesse angulaire constante ω, on a, en appelant t le temps, et désignant par ψ_0 une constante,

$$\psi = \omega t + \psi_0.$$

Il en résulte que si p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée du corps suivant Ox, Oy, Oz on a, d'après les formules connues,

$$p = \omega \sin\theta \sin\varphi + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \omega \sin\theta \cos\varphi - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \omega \cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Puisque l'on demande d'étudier le mouvement du corps, sans parler des réactions qui s'exercent sur lui; puisqu'en outre, les liaisons auxquelles il est soumis sont sans frottement, la voie la plus rapide consiste manifestement à se servir des équations de Lagrange.

Si T est la demi-force vive du corps, on a, comme l'on sait,

$$\begin{aligned}
2\mathrm{T} &= \mathrm{A}(p^2+q^2)+\mathrm{C}r^2\\
&= \mathrm{A}\left(\omega^2\sin^2\theta+\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)+\mathrm{C}\left(\omega\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.
\end{aligned}$$

Il y a d'ailleurs une fonction des forces $-\mathrm{M}gl\cos\theta$, en désignant par M la masse du corps, par g l'intensité de la pesanteur, et par l la distance OG du point de suspension O au centre de gravité G, distance comptée dans le sens Oz.

Cela étant, on a immédiatement, par les équations de Lagrange

$$r = \omega\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} = r_0,$$

où r_0 est une constante arbitraire; puis :

$$\mathrm{A}\frac{d^2\theta}{dt^2} - \mathrm{A}\,\omega^2\sin\theta\cos\theta + (\mathrm{C}\omega r_0 - \mathrm{M}gl)\sin\theta = 0;$$

il faut d'ailleurs bien observer qu'il n'y a pas lieu d'appliquer le théorème des forces vives, puisque les liaisons ne sont pas indépendantes du temps.

L'équation précédente s'intègre immédiatement une fois, et donne

$$\mathrm{A}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \mathrm{A}\,\omega^2\cos^2\theta - 2(\mathrm{C}\omega r_0 - \mathrm{M}gl)\cos\theta - \mathrm{A}h = 0,$$

h étant une nouvelle constante arbitraire.

Les inconnues du problème sont donc déterminées finalement par les deux quadratures

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{h + 2\,\dfrac{\mathrm{C}\omega r_0 - \mathrm{M}gl}{\mathrm{A}}\cos\theta - \omega^2\cos^2\theta}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - \omega\cos\theta.$$

On pourrait exprimer θ et φ en fonction elliptique du temps; mais c'est inutile pour se rendre compte de la variation de ces angles. L'étude de cette variation est d'ailleurs immédiate, suivant l'ordre de grandeur des racines du trinome en $\cos\theta$ qui figure sous le radical, relativement aux quantités -1 et $+1$. Il ne semble donc pas utile d'insister davantage sur ce point.

Le mouvement relatif du corps par rapport au plan P se réduit à une rotation permanente autour de son axe, lorsqu'on a constamment $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ainsi qu'on le voit immédiatement. L'angle θ doit donc conserver une valeur constante θ_0, et puisque $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, on doit avoir, soit

$$\sin\theta_0 = 0,$$

soit

$$A\,\omega^2 \cos\theta_0 = C\,\omega\, r_0 - Mgl,$$

si toutefois c'est possible.

La valeur de h en résulte, puisque $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

L'expression de $\frac{d\varphi}{dt}$ est constante, et par suite φ varie proportionnellement au temps.

Dans l'un comme dans l'autre cas, tout se passe comme si la liaison n'existait pas entre l'axe du corps et le plan P.

II. *Un disque circulaire homogène, infiniment mince, de masse* M *et de rayon* R, *se meut, assujetti à rester dans un plan où sont tracés deux axes rectangulaires fixes* Ox, Oy. *A un certain moment, le centre du disque est en* O; *la vitesse* v *de ce centre est dirigée suivant* Ox, *et la vitesse angulaire de rotation du disque autour de son centre est* ω. *Au même instant, on rend immobile, par une liaison sans frottement, un point* A *du disque, défini par ses coordon-*

nées polaires $OA = \rho$, $\widehat{xOA} = \alpha$. *Déterminer la percussion que subit le disque, le nouvel état des vitesses des points du disque après la percussion, et la variation de force vive qui se produit.*

II. Le point A étant fixé, le disque ne peut plus que tourner autour de ce point, avec une vitesse de rotation ω', immédiatement après la percussion. Cette percussion est d'ailleurs appliquée en A, et ses composantes suivant Ox et Oy sont X et Y.

La rotation ω' autour de A peut être transportée au point O avec adjonction d'une translation qui a pour projections sur Ox et Oy les quantités $\omega'\rho \sin\alpha$ et $-\omega'\rho\cos\alpha$.

Les théorèmes généraux donnent, par suite, immédiatement les relations

$$\begin{aligned} M(\omega'\rho\sin\alpha - v) &= X, \\ M(-\omega'\rho\cos\alpha) &= Y, \\ \frac{MR^2}{2}(\omega' - \omega) &= \rho(Y\cos\alpha - X\sin\alpha), \end{aligned}$$

le moment d'inertie du disque par rapport à son centre étant $\frac{MR^2}{2}$. On en tire

$$\omega' = \frac{\frac{R^2}{2}\omega + v\rho\sin\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2},$$

$$X = M\frac{\frac{R^2}{2}(\omega\rho\sin\alpha - v) - v\rho^2\cos^2\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2},$$

$$Y = -M\frac{\left(\frac{R^2}{2}\omega + v\rho\sin\alpha\right)\rho\cos\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2}.$$

La perte de force vive subie par le disque est évidemment :

$$M(v^2 - \omega'^2\rho^2) + \frac{MR^2}{2}(\omega^2 - \omega'^2)$$

$$= M\frac{\frac{R^2}{2}(\omega^2\rho^2 - 2\omega v\rho\sin\alpha + v^2) + v^2\rho^2\cos^2\alpha}{\frac{R^2}{2} + \rho^2}.$$

Le théorème de Carnot aurait d'ailleurs donné pour cette perte de force vive l'expression

$$M[(v - \omega'\rho\sin\alpha)^2 + \omega'^2\rho^2\cos^2\alpha] + \frac{MR^2}{2}(\omega - \omega')^2,$$

et en égalant cette expression au premier membre de l'équation précédente, on retrouve la valeur de ω' donnée ci-dessus.