Nouvelles annales de mathématiques

Paul-J. Suchar

Sur une interprétation géométrique des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et avec second membre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 68-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__68_1>

[H5jα]

SUR UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS ET AVEC SECOND MEMBRE;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR
Docteur ès sciences.

1. On sait que toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants peut s'intégrer par des quadratures. Je me propose dans cette Note de donner l'intégrale générale à l'aide d'une interprétation géométrique. Nous allons d'abord rappeler quelques résultats connus.

Soient

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

une courbe plane, et

$$(2) \qquad p = \varphi(\alpha)$$

l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles. On sait que l'équation de la tangente à (1) peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad x \sin\alpha - y \cos\alpha = p,$$

et l'équation de la normale à la même courbe sera

$$(4) \qquad x \cos\alpha + y \sin\alpha = \frac{dp}{d\alpha};$$

or p et $\frac{dp}{d\alpha}$ sont les distances de l'origine des axes aux droites (3) et (4), il s'ensuit que la distance r au point de contact de (1) avec (3) est la diagonale d'un rectangle construit sur p et $\frac{dp}{d\alpha}$, on aura donc

$$(5) \qquad r^2 = \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2 + p^2,$$

d'où on obtiendra par dérivation

$$r\frac{dr}{dp} = \frac{d^2p}{d\alpha^2} + p;$$

or chacun de ses membres représente, comme il est bien connu, le rayon de courbure à la courbe (1) en un point de coordonnéees x et y. Nous aurons donc

$$(6) \qquad \rho = r\frac{dr}{dp} = \frac{d^2p}{d\alpha^2} + p.$$

2. On sait que toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, et avec second membre, peut toujours se ramener à la forme

$$\frac{d^2 v}{du^2} + v = f(u). \tag{7}$$

Or, dans cette équation, nous pouvons évidemment regarder v et u comme étant les coordonnées tangentielles d'un point dont les coordonnées cartésiennes sont x et y. Le second membre de cette équation sera, d'après (6), l'expression du rayon de courbure au point de coordonnées x et y, exprimé en fonction de l'angle de la tangente à la courbe avec une droite fixe; et l'intégrale générale de (7) sera, par conséquent, l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles. On aura alors, comme il est bien connu,

$$x = \int f(u) \cos u \, du + a,$$

$$y = \int f(u) \sin u \, du + b,$$

où a et b sont des constantes. Portons ces valeurs dans l'équation de la tangente

$$x \sin u - y \cos u = v,$$

on obtiendra l'équation de la courbe en coordonnées tangentielles, et par conséquent, l'intégrale générale de (7).

3. Nous allons terminer par une application à un problème de Mécanique dans le cas d'un point matériel sollicité par une force centrale et dont la loi est de la forme $\frac{\varpi(\theta)}{r^2}$, indiquée par Jacobi. On sait, d'après Binet, que l'équation différentielle de la trajectoire est de la forme

$$-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = F = \frac{\varpi(\theta)}{r^2}, \tag{8}$$

d'où

$$(9)\qquad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\varpi(\theta)}{C^2}.$$

Le théorème des aires peut se mettre sous la forme

$$(10)\qquad r.v \sin\varphi = C,$$

où r est le rayon vecteur d'un point matériel M, que nous supposons de masse égale à 1, v sa vitesse et φ l'inclinaison de la vitesse sur le rayon vecteur. On sait que si, par l'origine des axes qui est le centre de la force, on mène un segment OM_1 égal et parallèle à la vitesse v, le lieu de M_1 est une courbe appelée *hodographe* par Hamilton et qui jouit de la propriété que la tangente en M_1 à cette courbe est parallèle au rayon vecteur OM, de sorte que si cette courbe est rapportée aux mêmes axes que la trajectoire du point M, l'angle de la tangente à l'*hodographe* avec l'axe polaire est l'angle polaire θ. Il s'ensuit que l'inclinaison de cette tangente sur le rayon vecteur OM_1 est égale à φ ou à $\pi - \varphi$. Si donc p est la distance du point O à la tangente M et p_1 la distance à la tangente en M_1, la formule (10) nous donne pour le théorème des aires les deux formules

$$(11)\qquad pv = p_1 r = C,$$

et la formule (9) nous donne

$$\frac{d^2 p_1}{d\theta^2} + p_1 = -\frac{\varpi(\theta)}{C}.$$

Il résulte donc, d'après ce qui précède, que le rayon de courbure ρ_1 au point M_1 de la courbe hodographe a pour expression

$$(12)\qquad \rho_1 = -\frac{\varpi(\theta)}{C}.$$

Si, en particulier, la loi de la force F est celle trouvée par MM. Darboux et Halphen à la suite d'un problème proposé par Bertrand (¹), à savoir

$$(13) \qquad F = \frac{\mu_1}{r^2(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

on aura, d'après (12), pour le rayon de courbure, en un point de la courbe hodographe exprimé en fonction de l'angle de la tangente avec l'axe polaire,

$$\rho_1 = \frac{K}{(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

où nous avons posé $K = -\frac{\mu}{C}$. Dans une Note publiée dans les *Nouvelles Annales* (mars 1902), nous avons démontré que si, sous l'action d'une force centrale, un point matériel décrit une conique quelles que soient les conditions initiales, la courbe hodographe correspondante est aussi une conique. La loi de force donnée par la formule (13) donne pour trajectoires des coniques, il s'ensuit que si, d'une manière générale, nous désignons par α l'angle de la tangente à une conique avec une droite fixe, on aura pour le rayon de courbure de la conique exprimé en fonction de α

$$\rho = \frac{K}{(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est facile d'interpréter les constantes A, B et C. On remarque que si $B = 0$, $A = C$, la courbe est un cercle; donc ces constantes sont, à un coefficient constant près

---

(¹) BERTRAND, *Comptes rendus*, t. LXXXIV.

qui est le même, les coefficients de la forme quadratique d'une conique dont l'équation générale est mise sous la forme habituelle.

4. Une dernière remarque intéressante est la suivante :

Il résulte par analogie de la formule (5),

$$r^2 = \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2 + p^2,$$

la formule

$$v^2 = \left(\frac{dp_1}{d\theta}\right)^2 + p_1^2,$$

d'où, en ayant égard à (11),

$$r^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{v}}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{v^2}\right],$$

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Différentions ces formules et multiplions la première par v, nous aurons

$$v\,.\,r\,dr = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right)v\,dv,$$

$$v\,dv = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right)dr,$$

où, en ayant égard à la formule

$$v\,dv = F\,dr,$$

qui est la différentielle des forces vives, nous aurons finalement

$$\frac{rv}{F} = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right),$$

$$F = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right).$$

On obtient ainsi la formule de Binet et une nouvelle formule d'un intérêt facile à comprendre ([1]).