LÉON AUTONNE

Sur la canonisation des formes bilinéaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 57-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__57_0>

[B11a]

SUR LA CANONISATION DES FORMES BILINÉAIRES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

1. Considérons une *matrice* A ou Tableau des n^2 coefficients

$$A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

de déterminant

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

La matrice définit sans ambiguïté, soit une *forme bilinéaire*

$$A = A(x, y) = \sum_{jk} a_{jk} y_j x_k,$$

soit une *substitution* n-aire

$$A = \left| x_j \quad \sum_k a_{jk} x_k \right|.$$

2. La même lettre A peut désigner indifféremment la matrice, la forme bilinéaire ou la substitution. Je suivrai les règles du calcul symbolique telles qu'elles sont exposées par Frobenius (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 1). Les formules symboliques comporteront une triple interprétation, suivant qu'elles s'entendront de matrices, de formes bilinéaires ou de substitutions.

3. Une matrice A_0 sera *canonique* si

$$A_0(x, y) = \sum_j h_j x_j y_j = \sum h x y.$$

Si $h_j = 1$, la matrice devient la matrice unité E,

$$E(x, y) = \sum x y.$$

Soient A et B deux matrices, avec $|B| \neq 0$. Si l'on a B telle que

$$A = B^{-1} A_0 B, \qquad A_0 = \text{canonique},$$

A est *canonisable* et admet A_0 pour *forme canonique* et B pour *canonisante*.

A est toujours canonisable si l'équation caractéristique

$$(\mathfrak{D}) \qquad \Delta(r) = \Delta_0(r) = |rE - A| = 0$$

n'a que des racines simples. A cesse en général d'être canonisable, s'il apparaît dans $\mathfrak{D}$ des racines multiples.

4. M. Jordan a signalé, il y a longtemps déjà, que toute substitution d'ordre fini était canonisable. Il en est de même pour les substitutions *unitaires* et les substitutions *hermitiennes* que j'ai étudiées [*Sur l'Hermitien* (*Rendiconti du Cercle Mathématique de Palerme*, 1902); *Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux* (*Bulletin de la Société Mathématique*, 1902)] et les substitutions *réelles* et *orthogonales*, cas particulier des unitaires, ainsi du reste que pour toutes les *orthogonales*.

Par contre, je n'ai vu publiées nulle part les conditions générales, nécessaires et suffisantes de canonisabilité.

Elles se déduisent facilement, ainsi qu'on le verra ci-dessous, d'un fameux théorème de Weierstrass (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1868, p. 310 à 338).

5. Rappelons d'abord les principes de la théorie.

Prenons un *faisceau* de matrices $f_r = rA + B$, r étant un paramètre variable, et nommons $\Delta(r) = \Delta_0(r)$ le déterminant

$$|\, rA + B \,|,$$

premier membre de l'équation caractéristique (D), $\Delta(r) = 0$.

Dans le déterminant Δ, les $k^{\text{ièmes}}$ mineurs seront des polynomes en r, de degré $n - k$. Nommons $\Delta_k(r)$ le plus grand commun diviseur de tous ces mineurs.

Supposons qu'une racine ρ de (D) possède un degré de multiplicité α_k dans l'équation $\Delta_k(r) = 0$, avec $k = 0, 1, \ldots, q$, tandis que : 1° $\alpha_0 = m$ est le degré de multiplicité dans (D); 2° $\alpha_q = 0$.

Les degrés de multiplicité α_k forment une suite décroissante

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_k > \ldots > \alpha_{q-1} > 0.$$

Les différences $\beta_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k$ forment une suite non croissante

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots \geqq \beta_k \geqq \ldots \geqq \beta_q.$$

Si l'on pose $\beta_k = 1 + \delta_k$, *les entiers positifs ou nuls δ_k forment une suite non croissante*

$$\delta_1 \geqq \delta_2 \geqq \ldots \geqq \delta_k \geqq \ldots \geqq \delta_q.$$

D'ailleurs

$$\sum_{k=1}^{k=q} \beta_k = (\alpha_0 - \alpha_1) + (\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots$$
$$+ (\alpha_{k-1} - \alpha_k) + \ldots + \alpha_{q-1} = \alpha_0 = m = q + \sum_{k=1}^{k=q} \delta_k,$$

d'où la formule

$$(1) \qquad m - q = \sum_{k=1}^{k=q} \delta_k.$$

Si tous les δ sont nuls, q est précisément le degré m de multiplicité que la racine ρ possède dans $\mathfrak{D}$.

6. Weierstrass dit que les expressions

$$(r-\rho)^{\beta_k}$$

sont les *Elementartheiler* afférents à la racine ρ.

Pour abréger, je dirai que ces expressions sont les *successifs* (sous-entendu : facteurs ou diviseurs) afférents à la racine ρ.

Le successif est *simple*, si l'exposant β_k est égal à l'unité, d'où $\delta_k = 0$.

7. Deux faisceaux de matrices

$$r\mathrm{A} + \mathrm{B} \quad \text{et} \quad r\mathrm{C} + \mathrm{D}$$

sont *équivalents* s'il existe deux matrices L et M, avec

$$|\mathrm{L}| \neq 0, \qquad |\mathrm{M}| \neq 0,$$

telles que

$$r\mathrm{C} + \mathrm{D} = \mathrm{L}(r\mathrm{A} + \mathrm{B})\mathrm{M},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{C} = \mathrm{LAM}, \qquad \mathrm{D} = \mathrm{LBM}.$$

Alors C est *équivalente* à A et D à B.

Dans le cas particulier où $\mathrm{C} = \mathrm{A} = \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{L} = \mathrm{M}^{-1},$$

et *l'équivalence se change en similitude.*

Ainsi *pour que deux matrices* A *et* A_0 *soient sem-*

blables, il faut et il suffit que les deux faisceaux

$$rE - A \quad \text{et} \quad rE - A_0$$

soient équivalents.

8. L'admirable théorème de Weierstrass s'énonce ainsi :

Pour que deux faisceaux

$$rA + B \quad \text{et} \quad rC + D$$

soient équivalents, il faut et il suffit que les successifs soient identiques de part et d'autre.

9. Je vais en déduire la solution du problème proposé.

Théorème. — *Pour qu'une matrice* A *soit canonisable, il faut et il suffit que le faisceau caractéristique*

$$\varphi_r = rE - A$$

n'admette que des successifs simples.

La démonstration est très courte, après quelques explications préliminaires.

10. Conservons les notations du n° 5 et envisageons le système Ω des n équations linéaires et homogènes

$$(\Omega) \qquad \rho x_j = \sum_k a_{jk} x_k \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On a $\Delta_k(\rho) = 0$ pour $\rho = 0, 1, \ldots, q-1$, tandis que $\Delta_q(\rho) \neq 0$; Ω ne contient que $n - q$ équations distinctes.

Réciproquement, si le système Ω, aux n inconnues x_j, ne contient que $n-q$ équations distinctes, on a $\Delta_k(\rho)=0$ pour $k<q$ et $\Delta_q(\rho)\neq 0$.

Ces propriétés deviennent évidentes si l'on remarque que le déterminant des inconnues x_j dans Ω est précisément $\Delta_0(\rho)$.

En particulier, si les successifs relatifs à ρ sont simples, les δ_k sont nuls, $q=m$ [formule (1) du n° 5] et Ω contient $n-m$ équations distinctes. Réciproquement si Ω contient $n-m$ équations distinctes, les successifs sont tous simples, car les entiers δ ne peuvent être négatifs.

11. Lemme. — *Une matrice canonique* A_0 *a tous ses successifs simples.*

Soit

$$A_0(x,y)=\rho(x_1y_1+\ldots+x_my_m)+\rho'(x_{m+1}y_{m+1}+\ldots)+\ldots$$
$$(\rho'\neq\rho,\ldots).$$

La racine ρ de ω possède le degré m de multiplicité. Le système Ω contient les $n-m$ équations distinctes $x_{m+s}=0$, $s=1,2,\ldots,n-m$. Par suite (n° 10) tous les successifs sont simples dans la matrice A_0, ou, plus exactement, dans le faisceau caractéristique $r\mathrm{E}-A_0$ de A_0. C. Q. F. D.

12. La démonstration du théorème s'achève maintenant en quelques mots.

Pour qu'une matrice A soit canonisable, il faut et il suffit :

Ou bien que A soit semblable à une canonique A_0 (n°s 7 et 3);

Ou bien que les deux faisceaux (n° 7)

$$rE - A \quad \text{et} \quad rE - A_0$$

soient équivalents, c'est-à-dire (théorème de Weierstrass, n° 8) admettent les mêmes successifs.

Or (lemme du n° 11) le faisceau caractéristique $rE - A_0$ de la canonique A_0 a tous ses successifs simples et le théorème du n° 9 est démontré.

13. Si pour le faisceau caractéristique $rE - A$ on a tous les successifs simples et

$$|rE - A| = (r - \rho)^m (r - \rho')^{m'} (r - \rho'')^{m''} \dots$$
$$(\rho \neq \rho' \neq \rho'' \neq \dots),$$

on construira la canonique A_0

$$\begin{aligned} A_0(x, y) = {} & \rho(x_1 y_1 + \dots + x_m y_m) \\ & + \rho'(x_{m+1} y_{m+1} + \dots + x_{m+m'} y_{m+m'}) \\ & + \rho''(\dots) + \dots, \end{aligned}$$

et l'on sera sûr de l'équivalence des faisceaux $rE - A$ et $rE - A_0$, de la similitude de A avec la canonique A_0 et de la canonisabilité de A.

14. Voici quelques applications de ma proposition du n° 9.

Frobenius (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 53) signale que dans le faisceau caractéristique d'une orthogonale R réelle, tous les successifs sont simples. Toutes les matrices R doivent donc être canonisables. C'est ce que j'ai effectivement établi, par voie directe, dans mon travail *Sur l'Hermitien* (*loc. cit.*, n^{os} 22, 35 et 36).

Pareillement, dans ce même travail, je montre que toute hermitienne ou toute unitaire (*loc. cit.*, n° 22) et même toute orthogonale (car la démonstration vaut aussi pour une orthogonale), est canonisable, donc : *le faisceau caractéristique d'une hermitienne, d'une unitaire ou d'une orthogonale a tous ses successifs simples.* Il en est de même pour une substitution d'ordre fini, toujours canonisable (M. Jordan).

15. Il me semblerait surprenant que ma proposition du n° 9, conséquence si immédiate du théorème de Weierstrass, eût échappé jusqu'à ce jour à la sagacité des algébristes. J'en publie néanmoins la démonstration et l'énoncé, n'ayant rien trouvé dans aucun Mémoire de Mathématiques, qui ressemblât au théorème du n° 9. Au surplus, si la proposition ne se trouvait pas nouvelle, la démonstration le serait peut-être.