# Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 3 (1903), p. 569-574
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__569_0>

# CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

## Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On demande d'étudier le mouvement d'une plaque elliptique infiniment mince homogène et pesante, dont chaque élément superficiel est attiré par un point fixe* A *proportionnellement à la masse et à la distance.*

*La masse de la plaque est égale à* 1; *les longueurs de ses demi-axes de symétrie sont* 2 *et* 1. *A l'origine du mouvement, le centre de la plaque n'a pas de vitesse, et la plaque tourne, avec la vitesse angulaire* $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, *autour d'une droite passant par le centre, située dans le plan mené par le grand axe perpendiculairement au plan de la plaque, et faisant avec ce grand axe un angle dont la tangente vaut* $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point matériel, de masse égale à l'unité, se meut sous l'influence d'une force centrale issue de* O. *On demande de déterminer la trajectoire et la loi de force, sachant que l'hodographe du mouvement, construit avec le point* O, *est un cercle de centre* O.

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Le sommet d'un cône de révolution, pesant et homogène, glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe. On imprime au cône une rotation autour de son axe qui est laissé sans vitesse dans une position inclinée sur la verticale, et l'on abandonne le cône aux forces qui le sollicitent. Trouver le mouvement du cône, indiquer la forme de la trajectoire du sommet.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point d'une figure plane de forme invariable décrit une droite fixe d'un mouvement uniformément accéléré, tandis que la figure tourne autour de ce point d'un mouvement uniforme.*

1° *Trouver les roulettes;*

2° *Pour une position de la figure, construire le cercle des inflexions et le point d'accélération nulle; trouver le lieu de ce dernier point quand la figure se déplace.*

(Novembre 1902.)

## Nancy.

Épreuve écrite. — *Dans un plan vertical on donne une barre fixe* O$x$ *inclinée d'un angle* $\alpha$ *sur l'horizontale, et une barre pesante et homogène* AB *mobile autour de son extrémité inférieure* A *qui est fixe.*

*Entre les deux barres est placé un disque circulaire pesant et homogène qui a le même poids que la barre* AB.

*Le diamètre du disque est égal à la distance du point* A *à la barre* O$x$ *de sorte que les deux barres sont parallèles.*

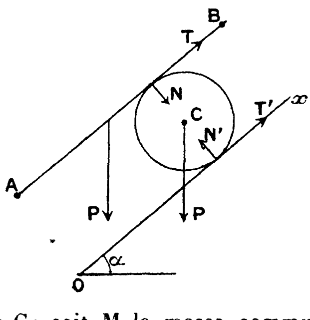
*Les corps sont dépolis et le coefficient de frottement* $f$ *du disque sur les deux barres est égal à* $\frac{1}{2}\tan g\alpha$.

*Au commencement, le disque est immobile et il touche la barre* AB *à son extrémité supérieure* B.

*Montrer qu'il n'y a pas équilibre, que le disque commence à rouler sans glisser sur la barre* O$x$, *et qu'il finira par s'arrêter dans une position qu'on demande de déterminer.*

Solution.

Soient R le rayon du disque, $2a$ la longueur AB, et $x$ l'ab-




scisse du centre C; soit M la masse commune du disque et de AB, leur poids P est M$g$; soient N, T, N', T' les réactions normales et tangentielles au disque; soit enfin $\theta$ l'angle dont tourne le disque.

S'il y avait équilibre, on aurait

$$N x = P a \cos\alpha, \qquad N' = N + P\cos\alpha,$$
$$T + T' = P\sin\alpha, \qquad T = T',$$

on en conclurait

$$N = P\cos\alpha\,\frac{a}{x}, \qquad N' = P\cos\alpha\left(1 + \frac{a}{x}\right),$$
$$2T = 2T' = P\sin\alpha;$$

mais on doit avoir

$$T < Nf.$$

On aurait donc

$$f > \tang\alpha$$

à cause de la position initiale. Il y a donc mouvement.

Les équations du mouvement du centre de gravité du disque donnent

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = T + T' - Mg\sin\alpha, \qquad 0 = N' - N - P\cos\alpha.$$

Or

$$MK^2 = \frac{1}{2}MR^2,$$

on a donc

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2(T' - T).$$

S'il y a roulement simple sur $Ox$, on a

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad T' < N'f,$$

et il y aura glissement sur AB, ce qui donne

$$T = Nf = Mgf\cos\alpha\,\frac{a}{x}.$$

On aura donc

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mgf\cos\alpha\,\frac{a}{x} - Mg\sin\alpha + T',$$

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2T' - 2Mgf\cos\alpha\,\frac{a}{x};$$

on en déduit

$$3\frac{d^2x}{dt^2} - 4gf\cos\alpha\,\frac{a}{x} - 2g\sin\alpha = 2g\sin\alpha\left(\frac{a}{x} - 1\right).$$

De là on peut déduire T′ et vérifier facilement que $T' < N'f$.

En posant $\frac{dx}{dt} = u$, on a en intégrant avec la condition $u = 0$ pour $x = 2a$,

$$3u^2 = 4g \sin\alpha \left(a \log \frac{x}{2a} + 2a - x\right).$$

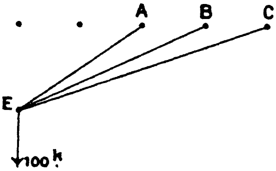
Le disque s'arrête pour

$$a \log \frac{x}{2a} + 2a - x = 0$$

ou environ pour

$$x = \frac{a}{5}.$$

Épreuve pratique. — *Trois barres* AE, BE, CE *de même section et de même métal, et dont on néglige le poids, sont*




*articulées ensemble en un point* E. *Elles peuvent pivoter autour de trois points fixes* A, B, C *situés sur une même horizontale, et tels que l'on ait*

$$AB = BC = 1^{m}.$$

*Le point* E *est à une distance de deux mètres de l'horizontale* ABC; *il est à une distance de* $2^{m}$ *de la verticale du point* A.

*Sachant qu'une barre qui aurait* $1^{m}$ *de long s'allongerait de* $1^{mm}$ *sous l'action d'un poids de* $1000^{kg}$, *trouver les tensions des trois barres données quand on applique en* E *un poids de* $100^{kg}$.

*Trouver aussi les projections sur l'horizontale et sur la verticale du déplacement du point* E.

## Solution.

En négligeant les variations des angles que font les barres avec l'horizontale, et en appelant $x$ et $y$ les coordonnées du point E primitivement égales à o et à 2, on trouve pour les tensions

$$T_1 = 303^{kg},727, \qquad T_2 = -53^{kg},340, \qquad T_3 = -190^{kg},422,$$

et pour le déplacement du point E

$$dx = 0^m,0031, \qquad dy = 0^m,0043.$$

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une plaque pesante* ABDEF *formée par un carré homogène de côté a et de densité 5 et par un demi-cercle homogène de densité 2 ayant pour diamètre* FD *est assujettie à tourner autour de la droite fixe horizontale* AB. *A l'instant initial elle est en repos et verticale; on lui imprime une percussion* CP *appliquée en son centre de masse et normale à la plaque.*

1° *Quelle doit être l'intensité de cette percussion pour que la plaque oscille autour de* AB *avec un angle d'oscillation* $\alpha$ *égal à* $\frac{\pi}{2}$ ?

2° *Quelle est alors la durée de chaque oscillation?*

3° *Quelle doit être l'intensité de la percussion pour que la plaque tende, sans jamais l'atteindre, vers la position verticale symétrique de celle qu'elle occupe au repos?*

4° *A quel instant passe-t-elle alors par la position horizontale?*

*On donnera les résultats à* $\frac{1}{100}$ *près.*

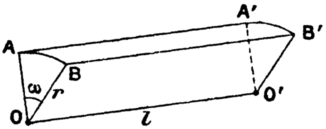
(Juillet 1902.)

## Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir en partant du principe des vitesses virtuelles les équations d'équilibre d'un solide libre, soumis à des forces quelconques.*

II. *Une tige rigide* OA, *de longueur l, a l'une de ses extrémités* O *qui est fixe; l'autre,* A, *est attirée vers un point fixe* P, *situé à la distance l de* O, *par une force proportionnelle à la distance* AP. *Mouvement de la tige.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le couteau d'une balance a la forme d'un secteur cylindrique. Déterminer, en le supposant formé d'une matière homogène, son moment d'inertie par rapport à l'arête vive, connaissant la longueur l de cette* *arête, le rayon r du cylindre auquel appartient le secteur, l'angle ω d'ouverture de ce secteur, le poids spéci-*




*fique p de la substance du couteau.*

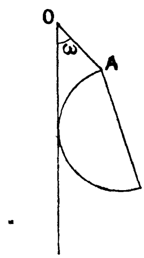
*Données numériques des unités C. G. S. :*

| | |
|---|---|
| $l$ ...................... | $1^{cm},27$ |
| $r$ ...................... | $0^{cm},38$ |
| $\omega$ ...................... | $8^{0}32'$ |
| $p$ ...................... | $7,816$ |

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Théorème de Coriolis. — Application à la détermination des projections de l'accélération d'un point mobile dans un plan, et rapportée à un système de coordonnees polaires, sur le rayon vecteur et sur la perpendiculaire à ce rayon vecteur.*

II. *Un demi-cercle homogène pesant de rayon* R, *situé dans un plan vertical, est rattaché par un fil inextensible et sans masse de longueur l fixé à l'extrémité* A *du diamètre qui le limite, à un point fixe* O *de ce plan vertical. La demi-circonférence appuie contre une tige verticale parfaitement polie passant par* O. *On demande de former*




*l'équation qui donne l'angle ω du fil avec la tige dans la position d'équilibre. Cet angle étant connu, comment calculerait-on la tension du fil et la réaction de la tige?*

(Novembre 1902.)