Nouvelles annales de mathématiques

J. Réveille

Sur une propriété de l'homographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 567-568

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__567_0>

[P1c]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HOMOGRAPHIE;

Par M. J. RÉVEILLE.

Cette propriété s'énonce ainsi :

Les droites qui joignent les points homologues de deux plans homologues, passant par une arête du tétraèdre double de l'homographie, rencontrent deux droites fixes et forment ainsi une congruence linéaire.

Les coordonnées des points homologues des deux figures homographiques, rapportées au tétraèdre double, sont liées par les relations

$$X' = \lambda X, \qquad Y' = \mu Y, \qquad Z' = \nu Z, \qquad T' = \rho T.$$

Soit un plan $T = KX$ passant par une arête du tétraèdre double; un point de ce plan a pour coordonnées x, y, z, kx; on a alors, pour les coordonnées du point homologue,

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \mu y, \qquad z' = \nu z, \qquad t' = \rho k x,$$

et pour celles d'un point de la droite qui joint ces deux points

$$lx + m\lambda x, \quad ly + m\mu y, \quad lz + m\nu z, \quad lkx + m\rho k x.$$

Au point où cette droite perce le plan $Y = 0$, on a

$$l + m\mu = 0;$$

ce point est donc

$$X = (-\mu + \lambda)x, \qquad Y = 0, \qquad Z = (-\mu + \nu)z,$$
$$T = k(-\mu + \rho)x;$$

d'où

$$\frac{T}{X} = \frac{k(\rho - \mu)}{\lambda - \mu}.$$

Il est sur la droite fixe

$$Y = 0, \qquad (\lambda - \mu)T = k(\rho - \mu)X.$$

On trouverait de même que la droite qui joint deux points homologues perce le plan $Z = 0$ en un point de la droite fixe

$$Z = 0, \qquad (\lambda - \nu)T = k(\rho - \nu)X.$$

Les deux plans

$$(\lambda - \mu)T = k(\rho - \mu)X, \qquad (\lambda - \nu)T = k(\rho - \nu)X$$

forment avec les plans $T = 0$, $X = 0$ un faisceau dont le rapport anharmonique est

$$\frac{\rho - \mu}{\rho - \nu} : \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \nu};$$

c'est le rapport anharmonique des quatre points d'intersection des quatre faces du tétraèdre double avec toute droite qui joint deux points homologues. On pourrait l'appeler le *rapport anharmonique de l'homographie*.

La propriété démontrée par M. Fontené ([1]) au sujet de deux figures semblables est un cas particulier de celle qui vient d'être exposée.

On énoncerait aisément la propriété corrélative.

([1]) *Sur un cas remarquable de la projection gauche* (*Nouvelles Annales*, 1896).