NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

# Sur le résultat du changement de l'ordre des termes dans une série

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 3 (1903), p. 507-511

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__507_1>

[D2aβ]

# SUR LE RÉSULTAT DU CHANGEMENT DE L'ORDRE DES TERMES DANS UNE SÉRIE;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

On sait que si l'on modifie de façon quelconque l'ordre des termes d'une série absolument convergente, la nouvelle série est encore absolument convergente et a même somme.

On sait aussi que l'on peut toujours modifier l'ordre des termes supposés réels d'une série semi-convergente de façon à lui donner telle somme que l'on voudra (finie ou même infinie).

Il est intéressant de compléter ces résultats en cherchant l'effet produit par une modification quelconque de l'ordre des termes d'une série *quelconque*.

Établissons d'abord quelques théorèmes presque évidents.

1° *Si, dans une série* S *convergente à termes tous positifs ou nuls, on modifie l'ordre de ces termes de façon quelconque, la série transformée* S' *est aussi convergente et a même somme que* S.

En effet, aussi grand que soit $n$ on peut trouver $p$ tel que $S_p$ contienne au moins tous les termes de $S'_n$, donc

$$S'_n \leqq S_p \leqq s.$$

Quand $n$ croît indéfiniment $S'_n$ a donc une limite $s' \leqq s$. On a de même

$$s \leqq s'.$$

Donc S' converge et a pour somme $s' = s$.

2° *Si l'on modifie l'ordre des termes d'une série divergente* S *à termes positifs ou nuls, la série transformée* S' *est aussi divergente.*

En effet, si grand que soit le nombre A, on peut trouver un nombre $q$ tel que pour $n \geqq q$ on ait

$$S_n > A.$$

Or, on peut trouver $p$ tel que $S'_p$ contienne au moins tous les termes de $S_q$ ; donc

$$S'_p \geqq S_q > A,$$

et alors pour $n > p$,

$$S'_n > A.$$

3° *Si, dans une série* S *à termes réels ou imaginaires quelconques dont le terme général* $u_n$ *tend vers zéro, on modifie l'ordre des termes de façon quelconque, le terme général* $u'_n$ *de la série transformée* S' *tend aussi vers zéro.*

En effet, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $p$ tel que pour $n > p$

$$|u_n| < \varepsilon.$$

Or les termes $u_1, \ldots, u_p$ sont devenus $u'_{m_1}, \ldots, u'_{m_p}$. Soit $q$, un nombre entier supérieur à $m_1, \ldots, m_p$. Pour $m > q$, le terme $u'_m$ ne peut provenir que d'un terme $u_n$ tel que $n$ soit supérieur à $p$. Donc, pour $m > q$, on a

$$|u'_m| = |u_n| < \varepsilon.$$

4° Il en résulte que si, au contraire, le terme général de S ne tend pas vers zéro, il en sera de même de celui de S'.

SÉRIES A TERMES RÉELS.

Appelons P et Q les séries formées par les termes positifs d'une part et les termes négatifs d'autre part, de la série à termes réels S dont le terme général est $u_n$.

Nous dirons que la série S est absolument convergente si les séries P et Q sont convergentes. Nous dirons qu'elle est absolument divergente si l'une des séries P et Q converge et que l'autre diverge; ou bien si le terme général $u_n$ ne tend pas vers zéro.

Enfin nous dirons que la série S est semi-convergente ou semi-divergente si les séries P et Q divergent toutes deux et si de plus le terme général de chacune d'elles tend vers zéro.

Ces définitions n'impliquent pas de contradiction, car si P et Q convergent toutes deux, S converge aussi ; de même dans le second cas, S diverge.

On voit maintenant qu'*une série quelconque* S *à termes réels peut toujours être rangée dans l'une des trois classes précédentes,* en convenant que, si l'une des séries P ou Q est limitée, on lui ajoute une infinité de termes nuls.

Et alors, ce qu'il y a lieu d'observer, c'est que *si l'on modifie l'ordre des termes de la série* S *de façon quelconque, elle reste toujours dans la même classe.*

Ceci résulte immédiatement des théorèmes énoncés plus haut. En outre, la démonstration classique du théorème cité au début, concernant les séries semi-convergentes, suppose seulement sur ces séries que les séries P et Q divergent et que leur terme général tend vers zéro. *Elle s'applique donc aussi aux séries semi-divergentes.*

On pourrait encore les ranger d'une autre manière en deux classes.

Convenons de dire qu'une série S telle que $S_n$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ a pour somme $+\infty$ ou $-\infty$.

Alors, la première classe sera formée des séries S pour lesquelles l'une au moins des séries P ou Q converge. La seconde classe sera formée des autres séries.

On voit que si l'on intervertit l'ordre des termes, une série reste dans sa classe ; mais *une série de la première classe garde toujours la même somme.* Au contraire, *on peut toujours modifier l'ordre des termes d'une série de la seconde classe de façon que* $S_n$ *ne tende vers aucune limite finie ou non.* Il suffira de prendre $n_1$ termes de P, $m_1$ termes de Q, $n_2$ termes de $P_1$, ..., de façon que

$$\left.\begin{array}{l}(P_{n_1} - Q_{m_1} + \ldots + P_{n_{r-1}} - Q_{m_{r-1}}) + P_{n_r} > A \\ (P_{n_1} - Q_{m_1} + \ldots + P_{n_r}) \qquad\qquad\quad - Q_{n_r} < B\end{array}\right\} \quad (A \neq B).$$

### SÉRIES A TERMES IMAGINAIRES.

Le théorème cité au début à propos des séries semi-convergentes ne s'étend pas aux séries à termes imaginaires. Il suffit de considérer l'exemple suivant :

La série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n^2} + i\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

est convergente, car il en est ainsi pour

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

D'autre part,

$$|u_n| = \sqrt{\frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^2}} > \frac{1}{n};$$

donc la série des modules est divergente. Alors la série $\sum u_n$ est semi-convergente. Cependant, en modifiant l'ordre de ses termes, on ne peut lui donner une somme quelconque, car la partie réelle sera toujours $\sum \frac{1}{n^2}$.