NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LERY

Sur les cercles tangents à trois cercles donnés

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 49-56

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__49_0>

[K12b]

SUR LES CERCLES TANGENTS A TROIS CERCLES DONNÉS;

PAR M. G. LERY.

Je me propose de montrer qu'une méthode de construction donnée par M. Mannheim ([1]) permet la discussion simple et complète de la réalité des solutions et de la nature des contacts. M. Mannheim a obtenu cette construction en transformant par inversion la solution du problème correspondant de la sphère; je commence par donner une démonstration directe.

CONSTRUCTION.

1. Comme M. Fouché l'a fait ([2]), j'étudie les cercles isogonaux aux trois cercles donnés : les cercles tangents en sont des cas particuliers. Les démonstrations sont simplifiées par l'usage des angles dirigés.

Remarques. — 1° Dans un plan orienté, l'angle d'une première droite avec une seconde est un nombre algébrique défini à $k\pi$ près; je dirai pour abréger qu'un angle multiple de π est nul.

2° Deux angles dont les côtés origine et extrémité sont respectivement symétriques par rapport à une droite ont alors une somme nulle; par suite, étant donnés deux cercles C_1 et C_2 qui se coupent en A et A',

([1]) *Nouv. Annales*, 1885, p. 108.

([2]) *Nouv. Annales*, 1892, p. 227.

l'angle de C_1 avec C_2 en A a une somme nulle avec l'angle de C_1 avec C_2 en A'.

De même pour l'angle de deux courbes C_1, C_2, en un point commun A, et l'angle de leurs transformées par une inversion, C'_1 et C'_2, au point inverse A'.

2. *Cercles isogonaux à deux cercles* C, C_1. — Soit Γ un tel cercle qui coupe C en M et M'. L'angle de C avec Γ en M est égal à l'angle de C_1 avec Γ en l'un de leurs deux points communs, et a une somme nulle avec l'angle de C_1 et Γ en l'autre; soient N' le premier de ces points, N le second.

MN et M'N' se coupent en un point O_2. L'inversion de centre O_2 qui transforme Γ en lui-même change C_1 en un cercle passant en M et M' et y faisant avec Γ justement les mêmes angles que C, *en grandeur et en signe;* ce cercle est C.

En conséquence, O_2 est l'un des deux centres d'inversion de C et C_1; sa puissance par rapport à Γ est le module α_2 de l'inversion de centre O_2 qui transforme C en C_1; enfin les points de rencontre de Γ avec C sont antihomologues par rapport à O_3 de ceux de Γ et C_1. La réciproque est évidente; il y a deux séries de cercles isogonaux, qui correspondent aux deux centres d'inversion O_2, O'_2.

Si MN est parallèle à M'N', O_2 est à l'infini. L'inversion correspondante est remplacée par une symétrie, par rapport à la perpendiculaire au milieu de MN; C et C_1 sont alors égaux.

Si l'on veut construire N antihomologue de M, il suffit, en appelant c et c_1 les centres des deux cercles, de mener le rayon $c_1 n$ parallèle à cM, de même sens ou de sens contraire; la droite Mn coupe C_1 en N. Le choix du sens du rayon $c_1 n$ correspond au choix possible de l'un des deux centres d'inversion O_2, O'_2 ; cette construction rend inutile la construction préalable de ces deux points.

3. *Cercles isogonaux à trois cercles* C, C_1, C_2. — Soit Γ l'un d'eux; la puissance par rapport à ce cercle de l'un des deux centres d'inversion de C et C_1, soit O_2, est le module α_2; de même l'un des deux centres d'inversion de C_1 et C_2, O par exemple, a pour puissance le module α, par rapport à Γ. Γ appartient donc à un faisceau linéaire. Réciproquement, les cercles de ce faisceau qui coupent C sont isogonaux à C et C_1, et à C_1 et C_2, d'après le n° 2.

Remarquons que, étant isogonaux à C_2 et C, la puissance par rapport à eux de l'un des deux centres d'inversion de C et C_2 égale le module correspondant; ce centre O_1 est sur la droite OO_2, axe radical du faisceau.

On a quatre faisceaux de cercles isogonaux, en accouplant l'un des centres O, O′ à l'un des centres O_2, O'_2.

Pour construire un cercle Γ isogonal à C, C_1, C_2, je prends un point M sur C, je construis son antihomologue N sur C_1 et l'antihomologue P de N, sur C_2, après avoir choisi les sens relatifs des rayons parallèles des trois cercles. Le cercle MNP est isogonal aux trois cercles. *On a facilement son second point de rencontre avec* C : le point M′, *antihomologue* sur C *du point* P, appartient en effet aux cercles isogonaux à C et C_2 qui passent en P et par rapport auxquels le point O_1 a la puissance α_1; c'est donc un point de Γ. Il reste à prouver qu'il est distinct de M; or l'angle de Γ avec C en M étant désigné par φ, celui de Γ avec C_1 en N est $-\varphi$; en P on a de même φ: en M′, $-\varphi$; donc M′ diffère de M, à moins que φ ne soit nul.

4. *Solution.* — Je considère l'un des quatre faisceaux de cercles isogonaux, qui est défini par le choix de trois centres d'inversion O, O_1, O_2 en ligne droite, ou par celui des sens de trois rayons parallèles. On a à chercher les cercles du faisceau tangents à C : ils toucheront C_1 et C_2. Je construis les axes radicaux MM', $M_1M'_1$ de C et de deux cercles du faisceau ; ils se coupent en H, qui a même puissance par rapport à C et à deux cercles du faisceau, donc à tous ; les tangentes menées de H au cercle C, si elles existent, sont les axes radicaux de C et des cercles cherchés ; on a un point de chacun d'eux en coupant C par la polaire de H, polaire qu'on a sans déterminer H, car elle passe aux points de rencontre des droites MM_1, M'_1M', et des droites MM'_1, $M'M_1$.

Chaque faisceau peut donc fournir deux solutions.

DISCUSSION.

5. Les deux solutions qui correspondent à l'un des quatre faisceaux existent ou non suivant que le point H, relatif à ce faisceau, est extérieur ou intérieur au cercle C. Je puis supposer, pour faire la discussion, que le point M_1 est très voisin de M ; alors M'_1 est très voisin de M'. *Le point* H *est extérieur à* C *si les petits arcs* MM_1, $M'M'_1$ *sont de sens contraire sur* C, *intérieur s'ils sont de même sens.* Pour simplifier, j'appelle *positif* le sens de rotation du petit arc MM_1 ; nous allons chercher quel est le sens de NN_1, puis de PP_1, et enfin de $M'M'_1$, ce qui nous montrera si le point H est extérieur ou intérieur à C.

Les points N et N_1 sont respectivement inverses de M et M_1 par rapport à l'un des centres de similitude de C et C_1, soit O_2. *Si* O_2 *est extérieur aux deux cir-*

conférences, la figure montre que *le sens de* NN_1 *est négatif;* dans les autres cas il est positif. Dans le premier cas, je donne à O_2 l'indice $\varepsilon_2 = -1$, dans les autres l'indice $\varepsilon_2 = +1$.

De même les points P et P_1 sont respectivement antihomologues de N et N_1 par rapport à un centre de similitude O de C_1 et C_2. Soit ε l'indice du point O, déterminé comme on l'a vu à propos de O_2; le sens de PP_1 relativement à celui de l'arc NN_1 est du signe de ε, et, relativement à l'arc MM_1 il est du signe de $\varepsilon\varepsilon_2$.

Enfin, soit ε_1 l'indice du centre de similitude O_1 par rapport auquel l'arc $M'M'_1$ est antihomologue de PP_1. On voit de la même façon que le sens de $M'M'_1$ est positif suivant que $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ est positif ou négatif.

Par conséquent, je considère trois centres de similitude O, O_1, O_2, en ligne droite et le faisceau isogonal correspondant; les indices ε, ε_1, ε_2 de ces trois centres étant déterminés, le faisceau fournira deux solutions ou zéro suivant que le produit $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ sera négatif ou positif.

6. Cette méthode, appliquée à chacun des cas de figure que peuvent présenter les trois cercles, donne dans chaque cas le nombre de solutions. Par exemple, si les trois cercles sont extérieurs, soient O, O_1, O_2 les centres de similitude directe, O', O'_1, O'_2 les centres de similitude inverse; les trois premiers ont l'indice -1, les autres également.

On a le Tableau suivant :

1er faisceau :	$O\,O_1\,O_2$,	$\varepsilon\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = -1$	(2 solutions);
2e	»	$O\,O'_1\,O'_2$,	$\varepsilon\,\varepsilon'_1\,\varepsilon'_2 = -1$	(2 solutions);
3e	»	$O'\,O_1\,O'_2$,	$\varepsilon'\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_2 = -1$	(2 solutions);
4e	»	$O\,O'_1\,O_2$,	$\varepsilon'\,\varepsilon'_1\,\varepsilon_2 = -1$	(2 solutions).

Il y a donc huit solutions.

On examinerait aussi facilement les autres cas de figure; on retrouve ainsi, par une méthode aussi courte que possible, les résultats de la discussion de M. Fouché.

7. Soit Γ une solution correspondant à un axe de similitude OO_1O_2; on peut, d'une façon analogue, connaître *a priori* la nature de ses contacts avec C, C_1, C_2. Nous partirons de la remarque suivante : si deux cycles sont tangents extérieurement, leurs sens sont contraires, et inversement. Je dirige C arbitrairement, et ensuite Γ de façon qu'il y ait concordance des sens au point de contact; je pose $\gamma = +1$ ou -1, suivant que Γ est du sens de C ou du sens contraire, c'est-à-dire que le contact est intérieur ou extérieur. L'inversion de centre O_2 qui transforme C en C_1 change Γ en un cycle Γ_1, ayant même support que Γ, et tangent au cycle C_1; le sens de C_1 est du signe de ε_2; celui de Γ_1 est du signe de $-\eta_2\gamma$, en posant $\eta_2 = +1$ si la puissance de l'inversion est positive, $\eta_2 = -1$ si cette puissance est négative.

Le contact de C_1 et Γ_1 est intérieur si ε_2 et $-\eta_2\gamma$ sont de même signe, donc si $\gamma\varepsilon_2\eta_2$ est négatif, extérieur dans le cas contraire.

En définissant de même l'indice η du centre O, on voit que le contact de C_2 et Γ_2 est intérieur si $\gamma\varepsilon\eta\varepsilon_2\eta_2$ est positif.

On remarque, en faisant les différentes figures, que, pour un centre de similitude direct de deux cercles, le produit $\varepsilon\eta$ est négatif, et qu'il est positif pour un centre inverse.

On voit ainsi que, si le faisceau relatif aux trois centres de similitude directe donne des solutions Γ_1, Γ_2, les contacts de Γ_1 avec les trois cercles sont de même espèce, ceux de Γ_2 également.

CAS PARTICULIERS.

8. Les cercles Γ qui doivent toucher un cercle C et deux droites C_1, C_2, ou bien deux cercles C, C_1 et une droite C_2, sont donnés par la même méthode de construction que les cercles tangents à trois cercles. Il n'y a, en effet, rien à changer dans la démonstration donnée, car une droite et un cercle possèdent deux centres d'inversion; pour deux droites, ces deux centres sont à l'infini sur les bissectrices, les inversions correspondantes étant remplacées par des symétries par rapport à ces bissectrices. Il existe encore quatre faisceaux de cercles isogonaux, dont chacun peut donner deux solutions; remarquons que, dans le cas de trois cercles, nous pouvions chercher les intersections de deux cercles d'un faisceau avec l'un quelconque des trois cercles; ici la construction serait illusoire si nous prenions le point M, qui définit un cercle du faisceau, sur la droite C_2 par exemple; on déterminerait bien, par la méthode indiquée, le second point de rencontre M' de ce cercle et de C_2, et l'on pourrait trouver un segment analogue $M_1M'_1$, mais le point H serait indéterminé.

On peut, cependant, finir la question en cherchant les points doubles de l'involution dans laquelle se correspondent M et M', M_1 et M'_1. Si M et M_1 sont pris sur le cercle C, on a encore à chercher les points doubles d'une involution, ce qui est alors très simple, comme nous l'avons vu.

Pour étudier l'existence des solutions, le plus simple est de ramener le problème au cas de trois cercles, par une inversion; les indices ε ne peuvent plus, en effet, être définis. Par exemple, deux droites et un cercle qui ne les coupent pas se transforment en deux cercles sécants et un cercle extérieur; il y a alors quatre solutions.

On ferait facilement, de cette façon, le tableau complet de la discussion.

9. Cercles passant par un point C et touchant deux cercles C_1 et C_2. Soient O et O′ les centres d'inversion de C_1 et C_2; les cercles isogonaux à C_1 et C_2 forment deux réseaux; ceux d'entre eux qui passent en C forment deux faisceaux, dont on a facilement les seconds points de base, et l'on est ramené à un problème connu, dont la discussion est facile.

THÉORÈME DE PASCAL.

10. Je considère trois cercles C, C_1, C_2 et un cercle Γ, isogonal aux trois premiers. Γ coupe C en M, sous l'angle φ, C_1 en $N(-\varphi)$, C_2 en $P(\varphi)$, C en $M'(-\varphi)$, C_1 en $N'(\varphi)$, C_2 en $P'(-\varphi)$. Les droites NP, N′P′ se coupent en O, PM et P′M′ en O_1, MN et M′N′ en O_2, et ces points sont trois centres de similitude en ligne droite. On a donc un hexagone inscrit à Γ, et les points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite. Soit, maintenant, un cercle Γ et un hexagone MNPM′N′P′ inscrit; je dis qu'il possède la propriété précédente. En effet, on peut faire passer respectivement par M et M′, N et N′, P et P′ des cercles qui coupent Γ sous un même angle, par exemple des cercles orthogonaux; la propriété de l'hexagone est alors évidente.