J. RICHARD

Sur certaines questions relatives aux surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 496-503

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__496_1>

[O6k]

SUR CERTAINES QUESTIONS RELATIVES AUX SURFACES ;

PAR M. J. RICHARD.

On sait l'importance que présentent, pour l'étude des surfaces, les formules concernant le mouvement à deux ou trois paramètres, d'un trièdre mobile. Je rappelle d'abord ces formules de la façon la plus brève possible. Le mouvement est supposé à trois paramètres u, v, w.

Les composantes parallèles aux arêtes du trièdre mobile de la rotation élémentaire sont désignées par

$$p\,du + p_1\,dv + p_2\,dw,$$
$$q\,du + q_1\,dv + q_2\,dw,$$
$$r\,du + r_1\,dv + r_2\,dw,$$

et les composantes de la translation de l'origine mobile sont

$$\xi\,du + \xi_1\,dv + \xi_2\,dw,$$
$$\eta\,du + \eta_1\,dv + \eta_2\,dw,$$
$$\zeta\,du + \zeta_1\,dv + \zeta_2\,dw.$$

a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' étant les neuf cosinus des angles que font les axes mobiles avec les axes fixes, on a neuf équations analogues à celle-ci

$$(1)\qquad \frac{da}{du} = br - cq;$$

on a aussi neuf équations analogues à la suivante, où X, Y, Z sont les coordonnées de l'origine mobile,

$$(2)\qquad \frac{dX}{du} = a\xi + b\eta + c\zeta.$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité des équations (1) et (2), on obtient neuf équations analogues à celle-ci

$$(3)\qquad \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1,$$

et neuf autres analogues à celle-ci

$$(4)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = q\zeta_1 - q_1\zeta - r\eta_1 + r_1\eta.$$

On trouvera dans le Ier Volume de la *Théorie des surfaces*, de M. Darboux, et dans la *Cinématique* de M. Königs la manière d'établir ces équations.

Je vais considérer le cas particulier où l'axe des x du trièdre mobile est tangent à la ligne décrite par l'origine mobile quand u seul varie, où l'axe des y est tangent à la ligne décrite par l'origine mobile quand v varie seul, et l'axe des z tangent à la ligne décrite par l'origine mobile quand w varie seul. On a alors :

$$\xi_1 = \xi_2 = \eta_2 = \eta = \zeta = \zeta_1 = 0.$$

Les équations analogues à (4) se simplifient alors, mais perdent, en partie, leur symétrie, de sorte qu'il ne suffira plus d'en écrire une pour avoir les autres par permutation.

Je vais donc écrire ici ces neuf équations séparément :

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l|l|l} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = -r\eta_1 & r_2\eta_1 + q_1\zeta_2 = 0 & \dfrac{\partial \xi}{\partial w} = q\zeta_2 \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r_1\xi & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial w} = -p_1\zeta_2 & p\zeta_2 + r_2\xi = 0 \\ q_1\xi + p\eta_1 = 0 & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial v} = p_2\eta_1 & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial u} = -q_2\xi \end{array} \right.$$

M. Darboux se sert de ces formules dans sa *Théorie des surfaces,* nous allons nous en servir ici pour établir quelques propositions démontrées autrement dans cet Ouvrage.

I. *Le théorème de Dupin.* — Prenons un point sur l'axe des z du trièdre mobile, axe qui est normal à la surface $w = \text{const.}$ Soient o, o et λ les coordonnées de ce point. Le déplacement de ce point a pour projections sur les axes mobiles (quand w reste constant) :

Sur Ox......... $\xi\, du + (q\, du + q_1\, dv)\lambda$

» Oy......... $\eta_1\, dv - (p\, du + p_1\, dv)\lambda$

» Oz......... $d\lambda$

Si le point O (l'origine mobile) décrit une ligne de courbure, et si λ est le rayon de courbure principal correspondant, le déplacement considéré doit être tangent à Oz, et l'on doit avoir

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi\, du - (q\, du + q_1\, dv)\lambda = 0, \\ \eta_1\, dv - (p\, du + p_1\, dv)\lambda = 0\,; \end{cases}$$

en éliminant λ, on a

$$\xi\, du(p\, du + p_1\, dv) + \eta_1\, dv(q\, du + q_1\, dv) = 0.$$

C'est l'équation des lignes de courbure de la surface $w = \text{const.}$

Or, cette équation se réduit à

$$du\, dv = 0.$$

En effet, des trois équations (5) qui ne contiennent pas de dérivées on déduit facilement que p, q_1, r_2 sont nuls.

Les lignes de courbure sont donc

$$u = \text{const.},\qquad v = \text{const.},$$

ce qui démontre le théorème de Dupin.

II. On sait (*voir* l'Ouvrage de M. Darboux) que, si l'on prend pour variables les paramètres des lignes de courbure, X, Y, Z et $X^2 + Y^2 + Z^2$ vérifient une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} + m\frac{\partial X}{\partial u} + n\frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

Je vais démontrer le résultat suivant, qui se trouve démontré, dans l'Ouvrage de M. Darboux sur les systèmes orthogonaux, par une méthode bien différente.

La distance de deux surfaces infiniment voisines $w =$ const. *satisfait à l'équation aux dérivées partielles précédente.*

Cette distance n'est autre que $\zeta_2\,dw$. Je vais démontrer que ζ_2 satisfait à cette équation.

On forme facilement cette équation (*Théorie des surfaces*, t. I, p. 211). On a ici l'élément linéaire de l'espace

$$ds^2 = \xi^2\,du^2 + \eta_1^2\,dv^2 + \zeta_2^2\,dw^2;$$

on a en particulier

$$\xi^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2,$$

d'où

$$\xi\frac{\partial \xi}{\partial v} = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\,\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = -\sum \frac{\partial X}{\partial u}\left(m\frac{\partial X}{\partial u} + n\frac{\partial X}{\partial v}\right) = -m\xi^2,$$

d'où

$$m = -\frac{1}{\xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial v};$$

de même

$$n = -\frac{1}{\eta_1}\,\frac{\partial \eta_1}{\partial u};$$

donc l'équation est

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\eta_1}\,\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\,\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Il s'agit de montrer que ζ_2 satisfait à cette équation.

Or, puisque p, q_1 et r_2 sont nuls, l'une des équations analogues à (3) se réduit à

$$\frac{\partial p_2}{\partial u} = r q_2.$$

On peut tirer des équations (5) les valeurs de p_2, r et q_2, et, en les portant dans la relation précédente, on a précisément l'équation qu'il s'agit d'établir.

De la proposition qui vient d'être démontrée on pourrait déduire sans trop de difficultés l'équation aux dérivées partielles d'où dépend la recherche de tous les systèmes triples orthogonaux.

III. *Démonstration d'un théorème dû à Liouville.* — La belle proposition que nous allons maintenant démontrer est la suivante :

Dans l'espace à trois dimensions les seules transformations qui conservent les angles sont des combinaisons d'inversions, d'homothéties, de déplacements et de symétries.

Considérons une transformation conservant les angles. Elle transformera le système des plans parallèles aux plans de coordonnées en un système triple orthogonal. Je suppose ce système formé des surfaces

$$u = \text{const}\,, \qquad v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.},$$

dont il est question ci-dessus. Comme la transformation change un triangle infiniment petit dans un autre semblable, le rapport des deux éléments d'arcs correspondants doit être indépendant de leur direction et dépendre seulement de leur position. Or

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2$$

est la formule donnant le carré du premier élément d'arc, et le second est donné par la formule

$$ds_1^2 = \xi^2\, du^2 + \eta_1^2\, dv^2 + \zeta_2^2\, dw^2.$$

Pour que leur rapport ne dépende que de la position du point, il faut évidemment que

$$\xi = \eta_1 = \zeta_2.$$

Appelons k la valeur commune de ces trois quantités ; d'après ce qui précède k satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 k}{\partial u\, \partial v} = \frac{2}{k}\,\frac{\partial k}{\partial u}\,\frac{\partial k}{\partial v}$$

et à deux autres analogues en permutant u, v, w, qui s'intègrent facilement et donnent

$$\frac{1}{k} = f(u) + \varphi(v) + \psi(w),$$

f, φ et ψ étant trois fonctions arbitraires : *nous n'aurons pas besoin de cette formule.*

Calculons les rayons de courbure principaux de la surface $w =$ const. Ils sont donnés par l'une ou l'autre des formules (6), où l'on fait d'abord $du = 0$, puis $dv = 0$. Ce sont

$$\frac{-\xi}{q} \quad \text{et} \quad \frac{\eta_1}{p_1};$$

or, ici,

$$\xi = \eta_1 = k, \qquad p_1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial w}, \qquad q = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial w},$$

comme le montrent les formules (5).

Les rayons de courbure sont égaux, tous les points sont des ombilics, la surface $w =$ const. est une sphère ; il en est de même des surfaces $u =$ const., $v =$ const.

Considérons les sphères w. Puisqu'elles coupent à angle droit deux sphères quelconques $u =$ const., elles ont leur centre dans le plan radical de ces sphères. On conclut de là que toutes les sphères $u =$ const. ont même plan radical et forment un faisceau. De même, pour les deux autres séries de sphères.

Maintenant toutes les sphères u et v étant coupées à angle droit par les sphères w doivent avoir même axe radical, intersection du plan radical de toutes les sphères u avec celui de toutes les sphères v. Mais les sphères u et v se coupant à angle droit, les unes couperont leur plan radical suivant un cercle réel, les autres, non. Elles ne peuvent donc avoir un même axe radical que dans le cas limite où toutes les sphères d'une même série sont tangentes entre elles. Nos trois séries de sphères passent donc par un même point et y touchent trois plans rectangulaires fixes. Dès lors, une inversion ayant pour pôle ce point les change en des plans rectangulaires. De là résulte sans peine le théorème énoncé.