Nouvelles annales de mathématiques

A. Mannheim

À propos d'une question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 483-485

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__483_1>

[$L^1 17a$]

A PROPOS D'UNE QUESTION PROPOSÉE;

PAR M. A. MANNHEIM.

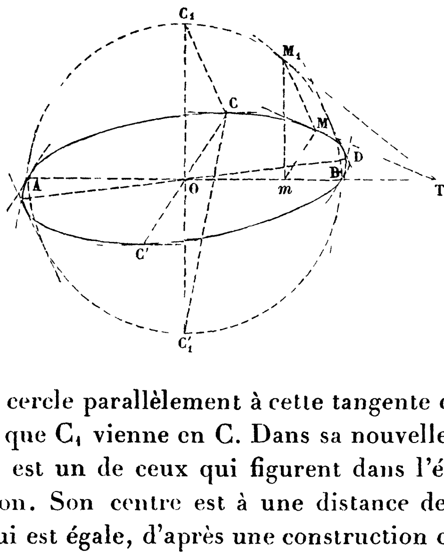
Trouver le lieu des centres des circonférences qui sont tangentes à une ellipse donnée et qui sont telles que les deux tangentes communes avec l'ellipse (autres que la tangente au point de contact) soient parallèles.

J'ai posé cette question dans le *Bulletin de Mathématiques spéciales* en mars 1900. Dès le mois de juin, ce Recueil contenait une solution analytique due à M. Barisien, et le numéro de juillet renfermait une solution géométrique signée (C. M.).

Mais quelle est l'origine de la question?

Il me paraît intéressant de la faire connaître aux élèves, c'est l'objet de cette courte Note.

Prenons le point M_1 sur le cercle de diamètre AB. Construisons le triangle $M_1 m M$ semblable à un triangle donné. Au point M_1 correspond ainsi un point M. Lorsque M_1 décrit le cercle, le point correspondant M décrit une ellipse. La tangente en M à cette courbe coupe AB au point où cette droite est rencontrée par la tangente M_1T au cercle. D'après cela, au point C, qui correspond au point C_1 extrémité du diamètre perpendiculaire à AB, la tangente est parallèle à AB : les segments OB, OC sont alors deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse. Menons au cercle une tangente parallèle à M_1M. Au point de contact de cette tangente correspond un point de l'ellipse pour lequel la tangente à l'ellipse se confond avec cette tangente au cercle, c'est-à-dire que c'est une tangente commune au cercle et à l'ellipse. Remarquons maintenant qu'on peut trans-



porter le cercle parallèlement à cette tangente commune de façon que C_1 vienne en C. Dans sa nouvelle position le cercle est un de ceux qui figurent dans l'énoncé de la question. Son centre est à une distance de O égale à C_1C qui est égale, d'après une construction connue, à la demi-différence des axes de l'ellipse.

En faisant varier le diamètre AB de l'ellipse on obtient de la même manière une suite de cercles répondant à l'énoncé et dont les centres sont à la même distance de O, c'est-à-dire sont sur un cercle.

Si l'on fait correspondre C à C'_1, diamétralement opposé à C, on obtient une autre série de cercles dont les centres sont à une distance de O égale à CC'_1, c'est-à-dire à la demi-somme des axes de l'ellipse.

Le lieu demandé se compose donc de deux cercles concentriques à l'ellipse, et dont les rayons sont respectivement égaux, l'un à la demi-somme des axes de l'ellipse, l'autre à la demi-différence de ces axes.

Tout ce qui vient d'être dit, et qui sert ici de démonstration, se trouve, ainsi que la figure, dans mon *Cours de Géométrie descriptive,* à propos de la recherche de l'ellipse perspective cavalière d'un cercle horizontal. Il a suffi, pour arriver à l'énoncé de la question, de remarquer la possibilité de déplacer le cercle de diamètre AB, en lui conservant ses tangentes communes, de manière à l'amener à être tangent à cette ellipse, son centre parcourant un segment égal à la demi-somme ou à la demi-différence des axes de l'ellipse, et cela quel que soit le diamètre AB de cette courbe.

On voit bien ainsi que la question qui vient d'être traitée résulte d'une simple remarque.