Nouvelles annales de mathématiques

# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 3 (1903), p. 471-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__471_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### 1855.

(1900, p. 382.)

*Un cône a pour sommet un point s d'un ellipsoïde et pour base la section diamétrale faite dans cette surface par un plan perpendiculaire au diamètre qui passe par s. L'enveloppe de ce cône, lorsque son sommet décrit l'ellipsoïde, est une surface de l'onde.* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. CANON.

On sait que si l'on projette un ellipsoïde sur ses plans tangents, les ellipses de contour apparent ainsi obtenues occupent une région de l'espace limitée à une surface de l'onde. Par rapport à une sphère concentrique à l'ellipsoïde, il suffit de transformer cette propriété par polaires réciproques pour obtenir le résultat demandé.

### 1928.

(1902, p. 288.)

*Soit*

$$N = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots l^\lambda m^\mu n^\nu \qquad (\alpha \gtreqless \beta \gtreqless \gamma \gtreqless \ldots \gtreqless \lambda \gtreqless \mu \gtreqless \nu),$$

*le plus petit nombre qui a un nombre donné de diviseurs :* 1° $\nu + 1$ *est un nombre premier;* 2° $\mu + 1$ *est un nombre premier, sauf l'exception suivante : le plus petit nombre ayant huit diviseurs est* $2^2 \times 3$. (G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. CHALDE.

Le nombre des diviseurs du nombre écrit est

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1).$$

1° Si $\nu+1$ n'est pas premier, soit

$$\nu+1=(\nu'+1)(\pi+1);$$

$p$ étant le nombre premier qui suit $n$, on peut remplacer $n^\nu$ par $n^{\nu'}p^\pi$ sans changer le nombre des diviseurs; or, je dis que l'on a

$$n^{\nu'}p^\pi < n^\nu$$

ou

$$p^\pi < n^{\nu-\nu'}$$

ou

$$p^\pi < n^{\pi(\nu'+1)}$$

ou, puisque $\pi$ n'est pas nul,

$$p < n^{\nu'+1},$$

ou, puisque $\nu'$ n'est pas nul,

$$p < n^2;$$

entre un nombre premier $n$ et son carré, il y a, en effet, au moins un nombre premier $p$, comme M. de Polignac l'a montré, dès 1849, par la seule considération des suites diatomiques (*Nouvelles Annales*, 1849, p. 428).

2° Si $\mu+1$ n'est pas premier, soit

$$\mu+1=(\mu'+1)(\pi+1);$$

on peut remplacer $m^\mu$ par $m^{\mu'}p^\pi$; cherchons si l'on a

$$m^{\mu'}p^\pi < m^\mu$$

ou

$$p < m^{\mu'+1};$$

il suffira que l'on ait

$$p < m^2.$$

Or, entre un nombre premier $m$ et son carré il y a au moins deux nombres premiers $n$ et $p$, sauf pour $m=2$, puisque, entre un nombre et son double, il y a au moins deux nombres premiers à partir de 6 [Desboves, par la méthode de Tchebyscheff pour le postulatum de Bertrand (*Nouvelles Annales*, 1855, p. 293)] et que, d'ailleurs, entre 3 et 9 ou entre 5 et 25, il y en a au moins deux. Il ne peut donc y avoir exception que pour $m = 2$, et encore faut-il que l'on ait $\mu' = 1$, puisque, entre 2 et 8, il y a trois nombres premiers; on doit avoir de même $\pi = 1$, puisque l'on peut échanger $\mu'$ et $\pi$; on a alors

$$\mu = 3,$$

et, par suite,

$$N = 2^3 \times 3^\nu \qquad (1 \leqq \nu \leqq 3).$$

On ne peut avoir $\nu > 1$, car le nombre $2^\nu \times 3 \times 5$, qui a le même nombre de diviseurs, est alors plus petit que le nombre considéré

$$2^\nu \times 15 < 3^\nu \times 8 \qquad (\nu > 1).$$

Pour $\nu = 1$, on cherche le plus petit nombre ayant huit diviseurs, et ce nombre est réellement $2^3 \times 3$; c'est le cas d'exception signalé dans l'énoncé.

## 1934.

(1902, p. 384)

*Étant donnée une parabole* P, *on considère les paraboles* Q *admettant pour tangente au sommet l'axe de* P, *et touchant la tangente et la normale à* P *en un même point. La parabole* Q *touchera constamment deux développées de paraboles.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. H. Couvert.

Soient M un point quelconque de P, MT la tangente, MN la normale en ce point; $\varphi$ étant le foyer de la parabole $Q_1$, les droites $\varphi$T, $\varphi$N sont respectivement perpendiculaires à MT, MN, puisque TN$x$ est la tangente au sommet de Q. La figure MT$\varphi$N est donc un rectangle et le point de rencontre F des diagonales étant le milieu de TN, ce point est le foyer de P. Enfin la directrice MD de Q passe en M. Ceci posé, soit $y^2 = 2px$ l'équation de P, et $\frac{\beta^2}{2p}$, $\beta$ les coordonnées de M.

Le paramètre de Q, distance de $\varphi$ à MD, est $2\beta$; X étant l'abscisse de $\varphi$, nous avons

$$\frac{X + \frac{\beta^2}{2p}}{2} = \frac{p}{2},$$

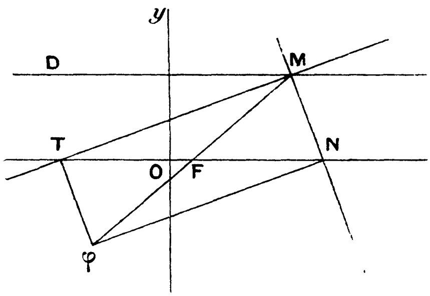
d'où

$$X = \frac{2p^2 - \beta^2}{2p}.$$

L'équation de Q est donc

$$(1) \qquad \left(x - \frac{2p^2 - \beta^2}{2p}\right)^2 + 4\beta y = 0.$$

L'enveloppe de Q s'obtiendra en éliminant $\beta$ entre (1) et la




dérivée par rapport à $\beta$ égalée à zéro : c'est

$$\left(x - \frac{2p^2 - \beta^2}{2p}\right)\frac{\beta}{p} + 2y = 0.$$

On en tire

$$x - \frac{2p^2 - \beta^2}{2p} = \frac{-2py}{\beta}.$$

Portant cette valeur dans (1), il reste, après avoir simplifié,

$$(2) \qquad \beta^3 = -p^2 y.$$

Nous éliminerons $\beta$ entre (1) et (2). Pour cela, de (2) nous tirons $\beta^2 = \frac{-p^2 y}{\beta}$. Cette valeur portée dans (1) donne

$$\left(x - p - \frac{py}{2\beta}\right)^2 + 4\beta y = 0$$

ou

$$[2\beta(x-p)-py]^2 + 4^2\beta^3 y = 0$$

ou enfin

$$[2\beta(x-p)-py]^2 - 4^2 p^2 y^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en

$$(3)\quad 2\beta(x-p)-py = -4py \qquad \text{ou} \qquad \beta = \frac{-3py}{2(x-p)},$$

et

$$(4)\quad 2\beta(x-p)-py = 4py \qquad \text{ou} \qquad \beta = \frac{5py}{2(x-p)}.$$

La combinaison de (2) avec (3) et (4) successivement donne

$$(5)\qquad 27py^2 = 8(x-p)^3,$$

$$(6)\qquad 125py^2 = 8(x-p)^3.$$

L'enveloppe de Q est donc formée par les courbes (5) et (6). La première est la développée de P, l'autre est la développée d'une parabole ayant même axe que P.

UN ANONYME nous adresse la remarque suivante, au sujet de la question **1934** :

« On voit immédiatement que la parabole Q est tangente à la développée de P, puisqu'elle touche la normale à cette courbe au centre de courbure de P, en vertu de ce théorème, donné autrefois par M. Mannheim : *La parabole tangente aux axes d'une ellipse, à la tangente et à la normale en un point de cette courbe, touche cette normale au centre de courbure correspondant de l'ellipse.* »

## 1958.

(1903, p. 48.)

*D'un point* A *d'une hyperbole donnée on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe; elles coupent en* B, C *la tangente à l'hyperbole au point* M. *On projette orthogonalement* A *en* P *sur la normale en* M. *Démontrer que les cercles tels que* PBC *passent par un même point, quel que soit le point* A *de l'hyperbole.* (MANNHEIM.)

## 1959.

(1903, p. 48.)

*Le triangle* ABC *est circonscrit à une parabole donnée; sur la normale à cette courbe, menée du point de contact de* BC, *on projette orthogonalement* A *en* P. *Démontrer que les cercles tels que* PBC *passent par un même point, quelle que soit la position de* A. (MANNHEIM.)

## 1960.

(1903, p. 48.)

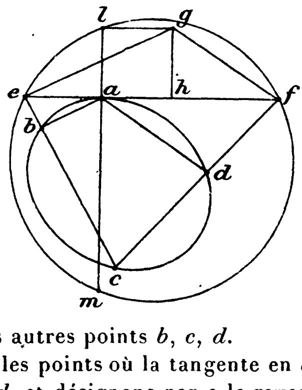
*Construire le rayon de courbure en un point d'une conique, connaissant la tangente en ce point et trois autres tangentes.* (MANNHEIM.)

SOLUTIONS

Par M. A. MANNHEIM.

J'ai fait connaître dans les *Comptes rendus* (8 mars 1875) deux relations : la première donne le rayon de courbure en un point $a$ d'une conique (*fig.* 1) connaissant la tangente en ce point et les trois autres points $b$, $c$, $d$.

Fig. 1.




Appelons $e$, $f$ les points où la tangente en $a$ est coupée par les droites $cb$, $cd$, et désignons par $\rho$ le rayon de courbure de la conique pour le point $a$.

La relation (1) est

$$\frac{1}{ae} + \frac{1}{af} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} eab} + \frac{1}{\operatorname{tang} daf}\right). \tag{1}$$

J'ai démontré cette relation dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* en 1890, et j'ai donné des constructions du rayon de courbure $\rho$.

Voici comment on arrive facilement à une construction de $\rho$.

Du point $e$ menons $eg$ parallèlement à $ba$, et du point $f$ menons $fg$ parallèlement à $da$, la relation (1) peut s'écrire

$$\frac{ef}{ae.af} = \frac{1}{2\rho}\frac{\sin egf}{\sin aeg \sin gfa} = \frac{1}{2\rho}\frac{ef}{eg \sin aeg}.$$

Abaissons du point $g$ la perpendiculaire $gl$ sur la normale en $a$, et par les points $e$, $l$, $f$ faisons passer un cercle. Il coupe au point $m$ la normale en $a$, la dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{al.am} = \frac{1}{2\rho}\frac{1}{gh}, \qquad \text{donc} \qquad am = 2\rho.$$

D'après cela, lorsque pour une conique on donne le point $a$, la tangente en ce point et les trois points $b$, $c$, $d$, on construit ainsi le rayon de courbure pour le point $a$. On prend les points de rencontre $e$, $f$ de la tangente en $a$ et des droites $cb$, $cd$. Du point $e$ on mène la parallèle $eg$ à $ba$ et du point $f$ la parallèle $fg$ à $ad$. On abaisse sur la normale en $a$ la perpendiculaire $gl$ : le cercle $elf$ coupe en $m$ la normale en $a$, et *le segment am est double du rayon de courbure demandé.*

On voit que si l'on fait varier le point $c$ sur la conique :

*Les cercles tels que elf passent par un même point, extrémité du segment am double du rayon de courbure.*

Dans le cas particulier où la conique est une hyperbole, et les points $b$ et $d$ à l'infini, ce dernier résultat donne la propriété qui fait l'objet de la question 1958.

La transformation par polaires réciproques de la relation (1), en prenant pour cercle directeur le cercle osculateur de la conique en $a$, donne (*fig.* 2) la relation suivante :

$$(2) \qquad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ad} = \frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{\tang\beta} + \frac{1}{\tang\delta}\right)$$

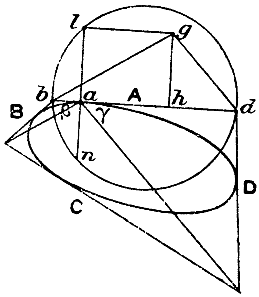
qui permet de déterminer le rayon de courbure en un point $a$ d'une conique lorsque l'on connaît la tangente A en ce point et les trois autres tangentes B, C, D.

Dans la relation (2) les points $b$, $d$ sont les points de rencontre de B, D avec A, et $\beta$, $\gamma$ sont les angles sous lesquels on voit du point $a$ les côtés du quadrilatère circonscrit à la conique, et qui sont des segments de B et de D.

Nous allons trouver que la construction de $\rho$, qui résulte de la relation (2), est tout à fait analogue à celle qui a été donnée précédemment.

Par le point $b$ menons la parallèle $bg$ à la droite qui va de $a$ au point de rencontre de B et C, et du point $d$ menons la

Fig. 2.




parallèle $dg$ à la droite qui va de $a$ au point de rencontre de D et C.

La relation (2) peut s'écrire

$$\frac{bd}{ab.ad} = \frac{2}{\rho}\,\frac{\sin bgd}{\sin abg \sin gda} = \frac{2}{\rho}\,\frac{bd}{gd \sin gda}.$$

Abaissons du point $g$ la perpendiculaire $gl$ sur la normale en $a$, et par les points $b$, $l$, $d$ faisons passer un cercle. Il coupe en $n$ la normale en $a$.

La dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{al.an} = \frac{2}{\rho.gh}, \qquad \text{donc} \qquad an = \frac{\rho}{2}.$$

D'après cela, lorsque pour une conique on donne le point $a$, la tangente A en ce point et les trois tangentes B, C, D, on construit ainsi le rayon de courbure pour le point $a$ :

On prend les points $b$, $d$ où A est coupé par B et D. Du point $b$ on mène la parallèle $bg$ à la droite qui va de $a$ au point de rencontre de B et C, et du point $d$ on mène la parallèle $dg$ à la droite qui va de $a$ au point de rencontre de D et de C.

On abaisse du point $g$ la perpendiculaire $gl$ sur la normale en $a$ et par les points $b$, $l$, $d$ on fait passer un cercle : *il coupe la normale en a au milieu du rayon de courbure relatif à ce point.*

Cette construction répond à la question **1960**.

Si l'on fait varier la tangente C, elle montre : *que les cercles bld passent par un même point.*

Dans le cas particulier où la conique est une parabole et la droite C à l'infini, ce dernier résultat donne la propriété qui fait l'objet de la question 1959.

Autres solutions des questions 1958 et 1959 par MM. Letierce, Barisien et Laureaux.

## 1961.

(1903, p. 48.)

*Déterminer une expression du rapport des arcs infiniment petits, interceptés sur deux courbes données, par des cercles infiniment voisins dont on connaît l'axe radical.*

(Mannheim.)

### SOLUTION

Par M. Canon.

Appelons $m$, $n$ les points de rencontre des deux courbes données et d'un cercle C, et $m_1$, $n_1$ les points de rencontre de ces mêmes courbes et du cercle $C_1$, infiniment voisin de C. Par les points $n$, $m$, $m_1$ faisons passer un cercle, il coupe $C_1$ au point $n_2$: les droites $mn$, $m_1n_2$ se coupent au point $r$ sur l'axe radical R qui est donné.

Appelons $t$ le point de rencontre de $mm_1$ et de $nn_2$ et appliquons une formule connue, on a

$$\frac{mm_1}{nn_2} = \frac{mr.mt}{nr.nt} = \frac{mr}{nr}.$$

Désignons par $\mu$, $\nu$ les angles que fait le cercle C avec $mm_1$, $nn_1$. Le triangle $nn_1n_2$ donne

$$\frac{nn_1}{nn_2} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu}.$$

Par suite

$$\frac{mm_1}{nn_1} = \frac{\dfrac{mr}{\sin\mu}}{\dfrac{nr}{\sin\nu}},$$

ou, en appelant $mp$, $nq$ les perpendiculaires abaissées de $m$, $n$ sur R, il vient l'expression demandée

$$\frac{mm_1}{nn_1} = \frac{\dfrac{mp}{\sin\mu}}{\dfrac{mq}{\sin\nu}}.$$