NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 466-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__466_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

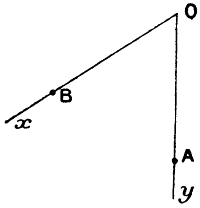
http://www.numdam.org/

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical, on donne deux droites fixes* Ox *et* Oy. *La droite* Oy *est verticale et la droite* Ox *fait avec* Oy *un angle de* 60°.

Deux points pesants A *et* B, *qui ont le même poids, sont*



assujettis à glisser sans frottement l'un sur Oy, *l'autre sur* Ox.

Ces points s'attirent proportionnellement à leur distance et au produit de leurs masses. L'attraction à la distance $2a$ ***est égale au poids de l'un des points.***

A l'origine des temps, les points sont sans vitesse, et ils sont l'un et l'autre à une distance de O *égale à* $2a$.

Trouver leur mouvement.

SOLUTION.

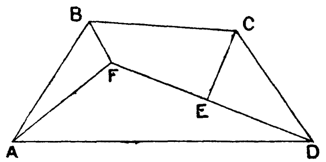
Si l'on appelle x et y les distances des points B et A au point O, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{4a}(4a - 2y + x),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{4a}(2a - 2x + y).$$

Elles rentrent dans une forme connue. Leurs intégrales renferment des cosinus; mais, les angles n'étant pas dans un rapport commensurable, le mouvement n'est pas périodique.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un système articulé* ABCDEF *dont les tiges ont des longueurs ainsi déterminées :*



Les tiges AB, BC, CD *forment les trois côtés consécutifs d'un hexagone régulier dont le côté a a* 1^m *de long. La tige* AD *est le diamètre du cercle circonscrit à cet hexagone. Le point* E *est le milieu du rayon qui aboutit en* C *et le point* F *est au tiers à partir de* B *du rayon qui aboutit en* B.

Le système est placé dans un plan vertical et il repose par A *et* D *sur deux appuis qui sont sur la même horizontale.*

On applique en E *un poids de* 1000^{kg}, *trouver les tensions des tiges.*

On pourra graphiquer ou calculer.

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan horizontal une plaque carrée et homogène est mobile autour de son centre* O *qui* *est fixe. Sur un des côtés de la plaque est placé un point mobile* P *qui est attiré par le point* O *proportionnellement à la distance. Trouver le mouvement de ce système sachant que la masse de la plaque est égale à douze fois la masse du point* P, *et supposant qu'à l'origine le système est sans vitesse et que le point* P *est à l'une des extrémités du côté sur lequel il se meut.*

Déterminer par sa tangente l'angle dont tourne la plaque à chaque oscillation.

Trouver la pression du point sur la plaque et celle de la plaque sur le point O.

Étudier la même question en supposant qu'à l'origine le mobile est très voisin du milieu du côté sur lequel il se meut, et donner, dans ce cas, la durée des petites oscillations du système.

SOLUTION.

En appelant θ l'angle dont a tourné la plaque à un instant donné, z la distance du mobile au milieu du côté sur lequel il se meut, $2a$ le côté du carré, M et m les masses, $m\lambda^2$ l'attraction du point O sur le mobile à l'unité de distance, on trouve, en appliquant le théorème des aires et le théorème des forces vives, les deux équations suivantes où les constantes répondent aux données initiales

$$(9a^2+z^2)\theta' = az',$$
$$(9a^2+z^2)\theta'^2+z'^2-2a\theta'z' = \lambda^2(a^2-z^2).$$

En éliminant θ', on a

$$\frac{8a^2+z^2}{9a^2+z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \lambda^2(a^2-z^2).$$

On voit ainsi que le mobile oscillera en allant d'une extrémité à l'autre du côté sur lequel il se meut.

La première équation peut s'écrire

$$d\theta = \frac{a\,dz}{9a^2+z^2},$$

d'où l'on tire

$$z = 3a\,\text{tang}(3\theta + c).$$

Pour $z = -a$, on a

$$\theta = 0,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang} c = -\frac{1}{3}.$$

Pour $z = +a$, on a

$$\operatorname{tang}(3\theta_1 + c) = \frac{1}{3} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang} 3\theta_1 = \frac{3}{4},$$

ce qui fait connaître l'angle θ_1 dont tourne la plaque à chaque oscillation.

Si primitivement le mobile était très près du milieu du côté, soit à une distance h de ce milieu, l'équation

$$\frac{8a^2 + z^2}{9a^2 + z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \lambda^2(h^2 - z^2)$$

montrerait que z oscille de $-h$ à $+h$. On poserait, dans une première approximation,

$$\frac{8}{9}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \lambda^2(h^2 - z^2).$$

En dérivant, puis intégrant, on trouverait

$$z = h \cos\frac{3}{4}\lambda\sqrt{2}\,t.$$

La durée des petites oscillations complètes est

$$\mathrm{T} = \frac{8\pi}{3\lambda\sqrt{2}}.$$

Enfin, en appliquant le théorème des moments à la plaque seule, on a la pression P du point sur la plaque par la relation

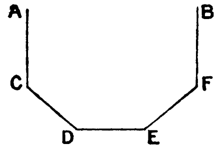
$$\mathrm{MK}^2\theta'' = -\mathrm{P}z,$$

d'où l'on tire, d'après ce qui précède,

$$\mathrm{P} = \mathrm{MK}^2\lambda^2 a\,\frac{89a^4 + 2a^2z^2 - z^4}{(9a^2 + z^2)(8a^2 + z^2)^2}.$$

Le centre de gravité de la plaque étant immobile, la pression de la plaque sur le point est égale à la pression du point sur la plaque.

Épreuve pratique. — *Les extrémités d'un fil sont fixées en deux points* A *et* B *situés sur une même horizontale. On marque sur ce fil des points* C, D, E, F *qui le par-*



tagent en cinq parties égales, et la distance AB *est égale au diamètre du cercle dont le côté du décagone inscrit serait égal à* AC.

On applique en C *et* F *des poids égaux chacun à* 10^{kg}, *et en* D *et* E *des poids* Q *égaux entre eux.*

Que doivent être ces points Q *pour que la figure affecte la forme d'un demi-décagone régulier?*

Si l'on augmentait ces poids Q *du millième de la valeur trouvée, de combien s'abaisserait le côté* DE, *en supposant que la distance* AB *soit égale à* 2^m. (Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — *Dans un plan horizontal un disque circulaire homogène peut tourner autour de l'un de ses points* O *qui est fixe.*

Sur la circonférence de ce disque glisse sans frottement un point matériel P *qui est attiré par le point* O *proportionnellement à la distance.*

Étudier le mouvement de ce système et trouver la pression du point P *sur le disque.*

On supposera : 1° *que la masse du disque est égale à dix fois la masse du point* P ; 2° *que la distance du point* O *au centre du disque est égale à la moitié du rayon;* 3° *qu'à l'instant initial le système est sans vitesse et que le rayon qui passe au point* P *est perpendiculaire sur celui qui passe au point* O.

Épreuve pratique. — *Un réservoir est fermé par un mur de* 10^m *de hauteur. L'épaisseur de ce mur à la partie supérieure est de* $0^m,50$.

Quelle doit être son épaisseur à la base pour qu'il résiste à la poussée du liquide. La paroi du mur en contact *avec l'eau est verticale, la paroi extérieure forme un plan incliné.*

Le poids du mètre cube de maçonnerie sera pris égal à 2400^{kg}, *le coefficient de frottement sera pris égal à* $\frac{1}{2}$ *et la résistance de la maçonnerie sera prise égale à* 4^{kg} *par centimètre carré.* (Novembre 1902.)