Nouvelles annales de mathématiques

E. Cahen

Sur une note de M. Fontené relative aux entiers algébriques de la forme $x + y\sqrt{-5}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 444-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__444_1>

[122a]

SUR UNE NOTE DE M. FONTENÉ RELATIVE AUX ENTIERS ALGÉBRIQUES DE LA FORME $x+y\sqrt{-5}$;

PAR M. E. CAHEN.

M. Fontené, dans une Note publiée dans ce Recueil (4e série, t. III, p. 209), a indiqué un moyen d'étendre aux entiers de la forme $x+y\sqrt{-5}$ (x, y entiers ordinaires) les lois de la divisibilité des nombres entiers ordinaires.

Il suffit de leur adjoindre les nombres

$$\frac{2x+(1+\sqrt{-5})y}{\sqrt{2}}.$$

En particulier le théorème fondamental :

Tout nombre n'est décomposable que d'une seule façon en facteurs premiers,

s'applique dans ces conditions.

C'est ce qu'annonce M. Fontené, mais il ne le démontre pas, parce que, m'a-t-il dit, sa démonstration est compliquée. En voici une très simple que je propose.

Considérons un ensemble de nombres imaginaires tels que le produit de deux nombres appartenant à cet ensemble y appartienne aussi.

Représentons ces nombres par des points à la façon ordinaire (le point $a + bi$ étant représenté par le point de coordonnées a, b, dans un système d'axes rectangulaires). Supposons que l'ensemble de ces points jouisse des deux propriétés suivantes :

1° *Étant donné un point quelconque du plan il y a au moins un point de l'ensemble qui en est à une distance plus petite que* 1.

2° *Le nombre des points dont la distance à l'origine est plus petite qu'une quantité donnée est fini.*

Il suffit alors de répéter le raisonnement fait aux nos 457 et 463 de nos *Éléments de la Théorie des nombres* sur les entiers de la forme $x + y\sqrt{-1}$, pour montrer qu'il existe un algorithme du plus grand commun diviseur; d'où suivent toutes les conséquences du n° 463 et, en particulier, le théorème fondamental énoncé plus haut.

Représentons donc l'ensemble des nombres

$$x + y\sqrt{-5} \quad \text{et} \quad \frac{2x + (1 + \sqrt{-5})y}{\sqrt{2}};$$

la seconde propriété est évidente. Pour démontrer la première, ne considérons que les nombres de la seconde classe.

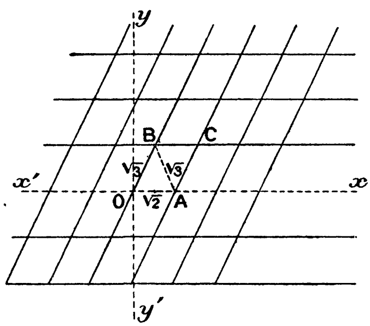
Si la propriété à démontrer est vraie pour ces nombres, elle l'est, *a fortiori,* pour l'ensemble des nombres des deux classes.

Or les nombres

$$\frac{2x+(1+\sqrt{-5})y}{\sqrt{2}}$$

sont représentés par les sommets d'un réseau de parallélogrammes égaux disposés comme l'indique la figure 1.

Fig. 1.



Dans le parallélogramme OABC qui sert de base au réseau, les sommets O, A, B ont pour coordonnées respectivement

$$(0,0),\quad (0,\sqrt{2}),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right).$$

Les dimensions de ce parallélogramme sont complètement fixées par les données suivantes :

$$OA=\sqrt{2},\qquad OB=\sqrt{3},\qquad AB=\sqrt{3}.$$

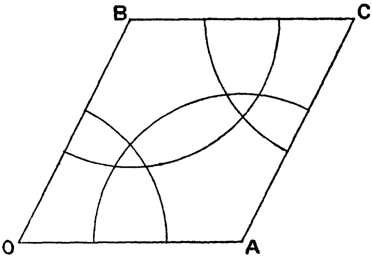
Et tout revient à démontrer que :

Tous les points de l'intérieur d'un parallélogramme ayant pour côtés $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, *et pour petite diagonale* $\sqrt{3}$, *sont distants de l'un au moins des sommets de moins de* 1.

Nous laissons au lecteur le soin de le démontrer.

D'ailleurs une figure suffit pour constater que quatre cercles de rayon 1, décrits des quatre sommets comme centres, couvrent tout le parallélogramme (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les résultats exposés par M. Fontené se généralisent d'ailleurs pour tous les entiers algébriques du second degré. C'est ce qu'on peut voir dans *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie* de M. Klein [t. II, p. 94 et suiv. (Göttingen, 1897)].

L'idée fondamentale est la même que celle de M. Fontené. Elle consiste à considérer ensemble toutes les formes quadratiques de même déterminant, puis à former certains nombres algébriques dont ces formes sont les normes. C'est l'ensemble de ces nombres qui obéit aux lois de la divisibilité ordinaire.