

FÉLIX GODEY

**Sur une propriété des lignes de
courbure des surfaces**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 441-444

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__441_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O5h]

**SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES DE COURBURE
DES SURFACES;**

PAR M. FÉLIX GODEY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Sous ce titre, M. Bricard a établi récemment, par la voie géométrique, un théorème relatif aux plans osculateurs des lignes de courbure d'une surface quelconque (*voir* l'énoncé dans le numéro d'août des *N. A.*, p. 360). Suivant le désir exprimé par la Rédaction, je vais donner une démonstration analytique du même théorème.

Je suppose la surface S rapportée à ses lignes de courbure

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.};$$

nous avons donc par hypothèse :

1°

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \equiv 0;$$

2° x, y, z vérifient l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = A(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial u} + B(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Ceci posé le plan osculateur aux courbes $v = \text{const.}$ aux différents points d'une même courbe $u = \text{const.}$ aura pour équation

$$(X - x)(y'_u z''_{u^2} - z'_u y''_{u^2}) + (Y - y)(z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2}) \\ + (Z - z)(x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2}) = 0.$$

Ce plan contient un paramètre variable v ; il enveloppe

donc une développable et, pour avoir la génératrice T correspondant au point m, il faut simplement chercher la caractéristique de ce plan; en dérivant par rapport à v l'équation ci-dessus on a

$$(X - x) (y''_{uv} z''_{u^2} + y'_{uv} z'''_{u^2v} - z''_{uv} y''_{u^2} - z'_{uv} y'''_{u^2v}) + \dots = 0.$$

Par suite, les cosinus directeurs de l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la génératrice T, seront proportionnels à

$$a = (z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2}) (x''_{uv} y''_{u^2} + x'_u y'''_{u^2v} - y''_{uv} x''_{u^2} - y'_u x'''_{u^2v})$$

$$- (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2}) (z''_{uv} x''_{u^2} + z'_u x'''_{u^2v} - x''_{uv} z''_{u^2} - x'_u z'''_{u^2v}),$$

$$b = \dots\dots\dots$$

$$c = \dots\dots\dots$$

Mais de la relation

$$\theta''_{uv} = A \theta'_u + B \theta'_v$$

on déduit, en dérivant par rapport à u,

$$\theta''_{u^2v} = A \theta''_{u^2} + AB \theta'_u + B^2 \theta'_v + A'_u \theta'_u + B'_u \theta'_v;$$

d'où, en remplaçant x''_{uv} , y''_{uv} , z''_{uv} , x'''_{u^2v} , y'''_{u^2v} , z'''_{u^2v} par leurs valeurs,

$$a = (B'_u + B) [(z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2}) (x'_u y'_v - y'_u x'_v)$$

$$- (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2}) (z'_u x'_v - x'_u z'_v)]$$

$$+ B [(z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2}) (x'_v y''_{u^2} - y'_v x''_{u^2})$$

$$- (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2}) (z'_v x''_{u^2} - x'_v z''_{u^2})].$$

Développant et simplifiant, on obtient par un calcul régulier

$$a = [B x''_{u^2} - (B^2 + B'_u) x'_u] \times D,$$

où

$$D = \begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix};$$

et, par permutation circulaire,

$$\begin{aligned} b &= [B y''_{u^3} - (B^2 + B'_u) y'_u] \times D, \\ c &= [B z''_{u^3} - (B^2 + B'_u) z'_u] \times D. \end{aligned}$$

Nous aurons de même, pour quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la génératrice T' ,

$$\begin{aligned} a' &= A x''_{v^3} - (A^2 + A'_v) x'_v, \\ b' &= A y''_{v^3} - (A^2 + A'_v) y'_v, \\ c' &= A z''_{v^3} - (A^2 + A'_v) z'_v. \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer l'identité

$$\Sigma [B x''_{u^3} - (B^2 + B'_u) x'_u] [A x''_{v^3} - (A^2 + A'_v) x'_v] = 0;$$

c'est-à-dire, en tenant compte de

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0,$$

l'identité

$$\begin{aligned} \Omega &= AB \Sigma (x''_{u^3} x''_{v^3}) - A (B^2 + B'_u) \Sigma (x'_u x''_{v^3}) \\ &\quad - B (A^2 + A'_v) \Sigma (x'_v x''_{u^3}) = 0. \end{aligned}$$

Nous allons déduire de la relation

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0,$$

les valeurs de $\Sigma x''_{u^3} x''_{v^3}$; $\Sigma x'_u x''_{v^3}$; $\Sigma x'_v x''_{u^3}$; pour cela dérivons cette égalité par rapport à u , on obtient

$$\Sigma x'_v x''_{u^3} = -AE,$$

où $E = \Sigma x'_{u^3}$.

On a de même, en dérivant par rapport à v ,

$$\Sigma x'_u x''_{v^3} = -BG,$$

où $G = \Sigma x'_{v^3}$.

Dérivons encore par rapport à v la première des deux équations ci-dessus, on a

$$\Sigma x''_{v^3} x''_{u^3} + \Sigma x'_v x''_{u^3 v} = -A'_v E - AE'_v,$$

d'où, tout calcul régulier fait, en remplaçant $x''_{u^2\nu}$ par sa valeur obtenue précédemment,

$$\Sigma x''_{\nu^2} x''_{u^2} = - (B^2 + B'_u)G - A^2E - A'_\nu E.$$

Remplaçons enfin, dans Ω , les trois Σ par les valeurs qui viennent d'être obtenues, il vient :

$$\begin{aligned} \Omega = & - AB[(B^2 + B'_u)G + (A^2 + A'_\nu)E] \\ & + A(B^2 + B'_u)BG + B(A^2 + A'_\nu)AE = 0. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

NOTE DE LA RÉDACTION. — Nous avons reçu également de M. JAMET une démonstration analytique à peu près identique à la précédente, et de M. GENTY une démonstration fondée sur l'emploi du calcul vectoriel.