Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Bioche

Sur une certaine courbe gauche du sixième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 435-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__435_1>

[$M^3 6g$]

SUR UNE CERTAINE COURBE GAUCHE DU SIXIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

J'ai été conduit, à l'occasion de mes recherches sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche [1], à considérer la courbe d'intersection de la surface cubique

$$XYZ + K^2(X + Y + Z) = 0$$

avec le cône

$$YZ + ZX + XY = 0.$$

Cette courbe constitue, avec les trois droites à l'infini sur la surface cubique, l'intersection de cette surface

(1) *Bull. Soc. Math. de France,* t. XXVII, 1899.

avec son hessien; elle possède des propriétés simples qu'il me semble intéressant d'indiquer.

1. On voit immédiatement que la courbe est du sixième ordre, et qu'elle possède quatre points doubles : l'un à l'origine, les autres à l'infini sur les axes de coordonnées. Les surfaces dont elle est l'intersection ayant pour centre l'origine et pour plans de symétrie les plans

$$Y = Z, \qquad Z = X, \qquad X = Y,$$

la courbe admet ces symétries. Comme les plans passent par le centre, elle admet comme axes de symétrie les perpendiculaires à ces plans, autrement dit les trois droites d'intersection du plan

$$X + Y + Z = 0$$

avec les plans de coordonnées.

2. On peut obtenir facilement les expressions des coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre arbitraire en remarquant que les équations des surfaces considérées peuvent s'écrire

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z}\frac{1}{X} + \frac{1}{X}\frac{1}{Y} + \frac{1}{K^2} = 0,$$

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = 0.$$

On a entre $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$ des relations analogues à celles qui existent entre les racines qui donnent $\cos\frac{a}{3}$ en fonction de $\cos a$. Un calcul facile conduit alors aux formules

$$X = \frac{K\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\varphi}, \qquad Y = \frac{K\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)}, \qquad Z = \frac{K\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)},$$

φ étant un paramètre variable. On déduit de là immédiatement que les asymptotes de la courbe sont les droites

$$\begin{cases} Y = K, \\ Z = -K, \end{cases} \quad \begin{cases} Y = -K, \\ Z = K, \end{cases} \quad \begin{cases} Z = K, \\ X = -K, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = -K, \\ X = K, \end{cases} \quad \begin{cases} X = K, \\ Y = -K, \end{cases} \quad \begin{cases} X = -K, \\ Y = K. \end{cases}$$

Ces six droites sont situées sur la quadrique

$$YZ + ZX + XY + K^2 = 0;$$

elles appartiennent trois par trois aux deux systèmes de génératrices.

3. On peut obtenir très facilement les résultats précédents en remarquant que, si l'on effectue la transformation

$$XX' = YY' = ZZ' = K^2,$$

on obtient, comme transformées de la surface cubique et du cône, la quadrique de révolution

$$Y'Z' + Z'X' + X'Y' + K^2 = 0$$

et le plan

$$X' + Y' + Z' = 0.$$

La courbe considérée a pour transformée un cercle; elle admet les symétries de la figure formée par ce cercle et les plans de coordonnées; et l'on retrouve l'expression des coordonnées au moyen d'un paramètre variable en remarquant que les coordonnées d'un point du cercle sont données par

$$\frac{X}{\cos\varphi} = \frac{Y}{\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{Z}{\cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{K}{\cos\frac{\pi}{6}}.$$