Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 420-430

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__420_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1895.

(1900, p. 574)

On considère l'hyperbole équilatère (H) *ayant pour sommets les foyers d'une ellipse* (E). *D'un point quelconque* P *de cette hyperbole on abaisse une des normales dont le pied est en* A. *Du centre* O *de* (E) *on abaisse la perpendiculaire* OS *sur la tangente en* A *et* OQ *sur la normale en* A. *On obtient ainsi le rectangle* OQAS. *Montrer que le produit des aires des quatre rectangles analogues correspondant aux pieds des quatre normales est une quantité constante.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

Soit $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ le point A. Les distances de O à la tangente et à la normale en A sont :

$$\text{OS} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

$$\text{OQ} = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\text{aire OQAS} &= \text{OS} \times \text{OQ}\\ &= abc^2\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = abc^2\,\frac{t}{a^2t^2 + b^2},\end{aligned}$$

en posant $\tan\varphi = t$. Si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les valeurs de t correspondant aux pieds des quatre normales issues d'un point de coordonnées x, y, nous nous proposons donc de calculer

$$\text{P} = (abc^2)^4\,\frac{t_1t_2t_3t_4}{(a^2t_1^2 + b^2)(a^2t_2^2 + b^2)(a^2t_3^2 + b^2)(a^2t_4^2 + b^2)}.$$

Or les quatre valeurs de t sont fournies par l'équation

$$(1)\quad \begin{cases} a^2x^2t^4 - 2abxyt^3 \\ \qquad + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)t^2 - 2abxyt + b^2y^2 = 0 \end{cases}$$

(*voir*, par exemple, *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques*, par DESBOVES, p. 16).

Dès lors

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = \frac{b^2y^2}{a^2x^2}.$$

Le dénominateur de P est le produit des quatre déterminations de $\theta = a^2t^2 + b^2$, quand on y remplace successivement t par les quatre racines de (1). Pour avoir ce produit, il suffit de former la transformée en θ de (1). Or la transformée de

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

correspondant à la relation $\theta = a^2t^2 + b^2$ est

$$\begin{aligned} &A^2\theta^4 + \ldots + [\ldots]\theta \\ &\qquad + [a^4E - b^2(Ca^2 - Ab^2)]^2 + a^2b^2(Bb^2 - Da^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Nous n'avons indiqué que les termes extrêmes, les seuls utiles. Le produit des quatre racines de cette équation est

$$\frac{[a^4E - b^2(Ca^2 - Ab^2)]^2 + a^2b^2(Bb^2 - Da^2)^2}{A^2}.$$

Si nous appliquons à la transformée de (1), nous avons

$$\frac{\left\{\begin{aligned} &[a^4b^2y^2 - b^2(a^4x^2 + a^2b^2y^2 - a^2c^4 - a^2b^2x^2)]^2 \\ &\qquad + a^2b^2(-2ab^3xy + 2a^3bxy)^2 \end{aligned}\right\}}{a^4x^4}.$$

Cette expression simplifiée devient

$$b^4c^4\frac{(y^2 - x^2 + c^2)^2 + 4x^2y^2}{x^4}.$$

C'est le dénominateur de P. On a donc

$$P = \frac{a^4b^4c^8}{b^4c^4}\,\frac{b^2y^2}{a^2x^2}\,\frac{x^4}{(x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2y^2}$$

ou

$$P = a^2 b^2 c^4 \frac{x^2 y^2}{(x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2 y^2}.$$

Le point x, y étant sur (H), on a

$$x^2 - y^2 - c^2 = 0.$$

Donc

$$P = \frac{a^2 b^2 c^4}{4}.$$

Le produit est donc constant.

D'une manière générale, le lieu des points tels que le produit des aires des quatre rectangles considérés soit constant est la quartique

$$(x^2 + y^2)^2 - \lambda x^2 y^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 = 0,$$

où λ désigne une constante. On voit que pour $\lambda = 4$ cette quartique est l'hyperbole H prise deux fois.

La forme générale de cette courbe est facile à indiquer, son équation étant bicarrée par rapport à chacune des coordonnées.

1913.

(1901, p. 192.)

Trouver en nombres entiers les solutions de l'équation

$$2x^3 = 3y^2 - 1.$$

(H.-J. Krantz.)

SOLUTION

Par le P. F. Pepin, S. J.

1. Il s'agit de trouver en nombres entiers les solutions de l'équation

$$(1) \qquad 2x^3 = 3y^2 - 1.$$

Comme je n'ai pas la prétention de résoudre complètement cette question, je me contenterai d'indiquer deux méthodes différentes pour chercher les solutions demandées. Nous parviendrons à la solution $x = 61$, $y = 389$. On parviendrait peut-être à d'autres solutions en poursuivant les calculs indiqués. Mais il resterait toujours à décider si le nombre des solutions est fini ou infini. Je suis convaincu que celui qui résoudra cette difficulté aura trouvé quelque chose de nouveau dans la théorie des nombres.

2. *Première méthode.* — On ramène la question proposée à celle de rendre rationnelle la racine carrée d'un polynome du quatrième degré au moyen d'une valeur rationnelle de la variable.

D'abord on déduit immédiatement de l'équation (1) que x et y doivent être impairs et positifs. Puisque 3 est résidu quadratique des diviseurs de x, on conclut, par le théorème de Legendre, que ces diviseurs sont compris dans les deux formules $12l+1$, $12l+11$. Quant au nombre x, il doit être de la forme $12l+1$. En effet, le produit $2x^3$ étant représenté par la forme $(3, 0, -1)$ ainsi que le facteur 2, il faut que l'autre facteur soit représenté par la forme $(1, 0, -3)$, laquelle ne convient qu'aux nombres de la forme $12l+1$. Le cube x^3 et sa racine x sont donc l'un et l'autre de la forme $12l+1$. Posons

$$x = 12z + 1.$$

Par cette substitution, l'équation (1) devient

$$(2)\qquad y^2 = 1 + 24z + 2.144z^2 + 8.144z^3 = \varphi(z).$$

Cette équation admet la solution évidente $z=0$, $y=1$. Elle admet aussi une infinité de solutions en nombres rationnels. On peut obtenir ces solutions au moyen des formules que j'ai publiées, en 1877, dans les *N. L. M.* Les solutions en nombres entiers s'obtiennent alors comme cas particuliers des solutions rationnelles.

3. Nous chercherons d'abord une solution de l'équation (2) par la méthode de Fermat, en posant

$$y = 1 + 12z + hz^2$$

et en déterminant h de manière à donner trois racines nulles à l'équation

$$\begin{aligned}(1 + 12z + hz^2)^2 - \varphi(z)\\ = (2h-144)z^2 + 8(3h-144)z^3 + h^2z^4 = 0.\end{aligned}$$

On y parvient en prenant $h = 72$, et en supprimant le facteur z^3 on trouve

$$z = -\frac{1}{9}, \qquad \varphi\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{25}{81} = y^2.$$

Connaissant deux solutions,

$$z = 0, \quad y = 1; \qquad z = -\frac{1}{9}, \quad y = \frac{5}{9},$$

nous pouvons employer les formules (II) (n° 3) du Mémoire cité :

$$(\text{II}) \qquad \begin{cases} f + gz_0 + hz_0^2 = \sqrt{\varphi(z_0)}, \\ f + gz_1 + hz_1^2 = \varepsilon\sqrt{\varphi(z_1)}, \qquad (\varepsilon = \pm 1), \\ g + 2hz_0 = \dfrac{\varphi'(z_0)}{2\sqrt{\varphi(z_0)}}, \\ z = \dfrac{2gh - 8.144}{-hh} - (2z_0 + z_1) \end{cases}$$

Prenant $z_0 = 0$, on a

$$\varphi(z_0) = 1, \qquad \varphi'(z_0) = 24, \qquad f = 1, \qquad g = 12.$$

La deuxième équation, pour $z_1 = -\frac{1}{9}$, devient

$$\frac{h}{81} = \pm\frac{5}{9} - 1 + \frac{12}{9}, \qquad h = -18, \qquad h = 72.$$

Pour $h = -18$ l'expression de z devient

$$z = \frac{24.18 + 8.144}{18.18} = \frac{1}{9} + \frac{44}{9} + \frac{1}{9} = 5.$$

On obtient ensuite $\sqrt{\varphi(5)}$ par la formule

$$1 + 12.5 - 18.25 = \pm\sqrt{\varphi(5)}, \qquad \sqrt{\varphi(5)} = 389.$$

La formule $x = 12z + 1$ donne la valeur correspondante

$$x = 61.$$

La seconde valeur de h, $h = 72$, donne pour z la valeur primitive $z = 0$.

4. Connaissant trois solutions :

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{5^2}{81}, \qquad \varphi(5) = 389^2,$$

on peut appliquer les formules (I) du Mémoire cité :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} f + gz_0 + hz_0^2 = \sqrt{\varphi(z_0)}, \\ f + gz_1 + hz_1^2 = \varepsilon\sqrt{\varphi(z_1)}, & (\varepsilon = \pm 1), \\ f + gz_2 + hz_2^2 = \varepsilon'\sqrt{\varphi(z_2)}, & (\varepsilon' = \pm 1), \\ z = \dfrac{8.144 - 2gh}{h^2} - (z_0 + z_1 + z_2), \\ f + gz + hz^2 = \pm\sqrt{\varphi(z)}. \end{cases}$$

Les quatre premières formules font connaître une quatrième solution, z, la cinquième formule donne la valeur rationnelle de $\sqrt{\varphi(z)}$. A raison des quatre combinaisons de ε et de ε', trois solutions données z_0, z_1, z_2 en font connaître quatre; mais quelques-unes de ces solutions peuvent s'identifier avec des solutions déjà calculées. J'ai montré dans le Mémoire cité (n° 10) comment le théorème d'Abel sur les sommes d'intégrales elliptiques donne l'explication de ce fait.

5. Sans nous arrêter aux applications de ces dernières formules, reprenons le système précédent (II) pour indiquer une méthode simple qu'on peut en déduire, pour obtenir successivement une suite indéfinie de solutions de l'équation (2).

Prenons $z_0 = 0$, désignons par z_1 une solution connue, différente de 0, et par z, les solutions qu'on en déduit par les formules (II) en y prenant $\varepsilon = \pm 1$. La première équation et la troisième donnent $f = 1$, $g = 12$, de sorte que l'on a

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} 1 + 12z_1 + hz_1^2 = \varepsilon\sqrt{\varphi(z_1)}, \qquad z = \dfrac{8.144 - 24h}{h^2} - z_1, \\ 1 + 12z + hz^2 = \pm\sqrt{\varphi(z)}. \end{cases}$$

La première formule donne la valeur de l'inconnue auxiliaire, h; la seconde détermine la nouvelle solution z et la troisième, la valeur correspondante de $y = \sqrt{\varphi(z)}$. Prenons

$$z_1 = -\frac{1}{9}, \qquad \varphi\left(-\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}\right)^2.$$

Nous trouvons

$$h = \pm 45 + 12.9 - 81, \qquad h = 72, \qquad h = -18.$$

Pour $h = 72$, on a

$$z = \frac{8.144 - 24.72}{72.72} + \frac{1}{9} = \frac{-1}{9} + \frac{1}{9} = 0.$$

On retrouve la solution primitive.

Pour $h = -18$, on a

$$z = \frac{8.144 + 24.18}{18.18} + \frac{1}{9} = \frac{44}{9} + \frac{1}{9} = 5,$$

$$1 + 12.5 - 18.25 = \pm\sqrt{\varphi(5)}, \qquad \sqrt{\varphi(5)} = 389.$$

Pour $z_1 = 5$, on a

$$1 + 12.5 + h.25 = \pm 389.$$

Avec le signe inférieur on retrouvera

$$h = -18 \qquad \text{et} \qquad z = -\frac{1}{9}.$$

Avec le signe supérieur on obtient

$$25h = 308, \qquad z + 5 = \frac{(8.144.25 - 308.24)25}{308.308}.$$

6. Dans les deux applications que nous venons de faire des formules (III) une seule des deux valeurs de ε donne une solution nouvelle, l'autre ramène une solution déjà calculée. On se rend compte de ce fait en remarquant que les solutions déterminées par ces formules sont les nombres rationnels z que l'on peut associer à des nombres rationnels h de manière à vérifier l'équation

$$(3) \qquad h^2z^2 + (24h - 8.144)z + (2h - 144) = 0.$$

A chaque valeur convenable de h cette équation fait connaître deux solutions z, z_1 dont la somme est exprimée par la formule

$$(a) \qquad z + z_1 = \frac{8.144 - 24.h}{hh}.$$

Si z_1 et h sont deux nombres rationnels vérifiant l'équation (3), la nouvelle solution z est aussi rationnelle. De même, à chaque valeur rationnelle de z l'équation (3) fait correspondre deux valeurs de h dont la somme est

$$(b) \qquad h + h_1 = \frac{24z + 2}{zz}.$$

Si l'une des deux valeurs de h est rationnelle, l'autre le sera également. Il suffit donc de connaître deux nombres rationnels h, z vérifiant ensemble l'équation (3) pour former, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b), une suite indéfinie dans laquelle chaque valeur de z sera comprise entre les deux valeurs de h qu'on peut lui associer de manière à vérifier l'équation (3).

On voit immédiatement la solution

$$h_1 = 72, \qquad z_1 = 0.$$

La formule (a) donne ensuite

$$z = \frac{8.144 - 12.144}{36.144} = -\frac{4}{36} = -\frac{1}{9}.$$

La formule (b) donne ensuite

$$h + 72 = \frac{+24.9 - 2.81}{1}, \qquad h = 54 - 72 = -18.$$

Avec les valeurs correspondantes $z_1 = -\frac{1}{9}$, $h_1 = -18$, on déduit de la formule (a) une nouvelle valeur de h, et ainsi de suite. Nous retrouvons ainsi la méthode posthume d'Euler que j'ai exposée dans le n° 8 du Mémoire cité de 1877.

7. *Seconde méthode.* — On considère l'équation proposée comme cas particulier de l'équation

$$(4) \qquad 2x^3 = 3y^2 - z^2.$$

On exprime d'une manière générale toutes les solutions de l'équation (4) en nombres premiers entre eux. On arrive à cette conclusion que :

Théorème. — *Toutes les solutions de l'équation* (4) *en* *nombres premiers entre eux sont exprimées par les deux systèmes :*

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x=f^2-3g^2, & y=f^3+9fg^2+3g(f^2+g^2), \\ & z=f^3+9fg^2+9g(f^2+g^2); \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} x=f^2-3g^2, & y=3f(f^2+9g^2)-15g(f^2+g^2), \\ & z=-5f(f^2+9g^2)+27g(f^2+g^2). \end{cases}$$

Il reste à trouver les systèmes de valeurs de f et de g, entières et premières entre elles, qui déterminent pour z des valeurs égales à ± 1.

On se trouve ainsi amené à chercher les solutions en nombres entiers de chacune des deux équations

$$\begin{aligned} z &= f^3+9fg^2+9g(f^2+g^2)=\pm 1, \\ z &= -5f^3+27f^2g-45fg^2+27g^3=\pm 1. \end{aligned}$$

Le lecteur trouvera dans le § XV de la *Théorie des nombres* de Legendre (Ire Partie) la méthode à suivre pour résoudre ces équations. D'après un théorème de Lagrange, les valeurs du rapport $\pm\dfrac{f}{g}$ qui correspondent aux minima des formes cubiques indiquées se trouvent parmi les fractions convergentes vers les racines des deux équations auxiliaires

$$t^3-9t^2+9t-9=0, \qquad 5t^3-27t^2+45t-27=0.$$

Comme ces développements peuvent se prolonger indéfiniment, et que, passé le second degré, leur loi est inconnue, on ne peut pas affirmer que le même minimum ne se représentera plus au delà d'une certaine limite. On peut trouver par cette méthode tous ceux des nombres f, g inférieurs à une limite donnée qui satisfont à la question, mais on ne peut pas démontrer qu'il n'y a plus de solution au delà de cette limite.

1924.

(1902, p. 96.)

Si la tangente en un point M *d'une hyperbole rencontre une des asymptotes au point* T *et si la droite qui joint* M *à l'un des foyers* F *rencontre la même asymptote en* A, *on a*

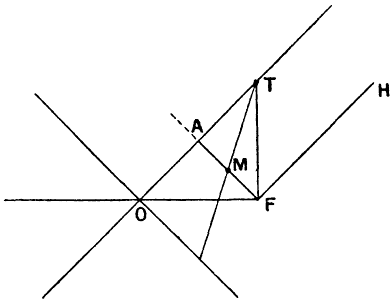
$$\mathrm{AT}=\mathrm{AF}.$$

Déduire de là le lieu des foyers des hyperboles dont on connaît une asymptote, une tangente et son point de contact. (M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. Frizac.

1. Les tangentes issues de T à l'hyperbole sont l'asymptote et la tangente MT, par suite TF est la bissectrice de l'angle MFH,



FH étant la parallèle à l'asymptote menée par le foyer. Donc

$$\widehat{MFT} = \widehat{TFH};$$

or

$$\widehat{TFH} = \widehat{FTA}$$

comme alternes internes; donc

$$\widehat{FTA} = \widehat{AFT},$$

le triangle AFT est isoscèle et

$$AF = AT.$$

2. Menons par M, point de contact de la tangente, une droite qui coupe l'asymptote en A; on obtiendra les foyers des hyperboles satisfaisant à l'énoncé par l'intersection de la droite MA et d'un cercle ayant son centre en A et pour rayon AT d'après le n° 1. On engendre ainsi une strophoïde oblique passant par M et ayant le point T pour point double (T est le point

d'intersection de la tangente et de l'asymptote) et le lieu des foyers est cette strophoïde.

Solution analytique de M. E.-N. BARISIEN.

1925.

(1902, p. 144.)

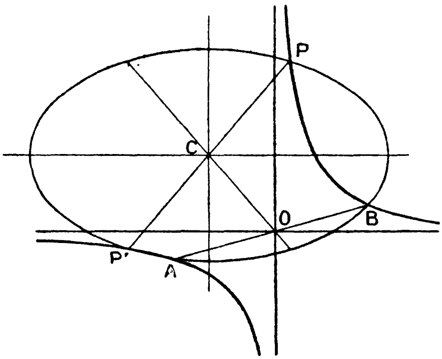
L'hyperbole équilatère ayant pour diamètre une corde AB *quelconque d'une conique* C *et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de cette conique passe par les extrémités du diamètre de* C *symétrique par rapport aux axes du diamètre conjugué de la direction de* AB.

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. R.-M. MILNE.

Soit PP′ le diamètre de C, qui est symétrique par rapport aux axes du diamètre conjugué de AB. La tangente à C en P fait avec les axes le même angle que AB : le cercle circonscrit



au triangle APB touche donc C en P. Il suit de là que PA et PB sont également inclinées sur les axes de C, c'est-à-dire sur les asymptotes de l'hyperbole équilatère. Donc enfin P et P′ appartiennent à cette courbe, en vertu d'une propriété bien connue.

Autre solution géométrique et solution analytique de M. FRIZAC.