Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 411-418

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__411_2>

CORRESPONDANCE.

M. **A.-H. Couvert**. — *Au sujet des questions* 1628 *et* 1491. — M. Barisien a énoncé et résolu la question 1628 dans *J. M. S.*, 1894, page 39, exercice III; une seconde solution se trouve également dans *J. M. S.*, 1894, page 140, question 351, § II. Les deux solutions sont d'ailleurs identiques.

La question 1491 est étudiée dans *J. M. S.*, 1886, page 39 (question d'examen 2*).

J'ai cru devoir vous envoyer ces renseignements, parce que, dans le *Tableau de correspondance* publié en 1900, les questions 1491 et 1628 sont considérées comme non résolues et que depuis aucune solution n'en a été donnée dans les *N. A.*

A **un abonné**, *à la Bourboule*. — Prière de vouloir bien me faire connaître votre nom et votre adresse : il vous sera répondu par Lettre particulière. R. B.

2° *Si cette tangente touche une courbe C sur l'une des sphères, l'arc de cette courbe, compté depuis une origine convenable, est égal à la longueur de la tangente commune.*

3° *La tangente commune touche la seconde sphère en un point qui décrit une courbe* C_1 *développante de* C.

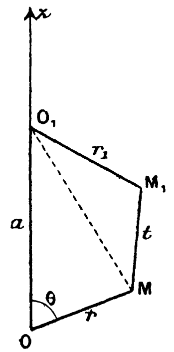
4° *Le plan osculateur en un point de la courbe* C *est le plan tangent à la seconde sphère au point correspondant de* C_1.

5° *Calculer le rayon de courbure de* C *au moyen du théorème de Meusnier.*

6° *Calculer le rayon de torsion de* C.

Solution.

1° $$t^2 + r_1^2 = \overline{OM}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$
$$t^2 = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2ar\cos\theta.$$



2° MM_1 étant la tangente en M, l'angle avec Oz est
$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Mais MM_1 est aussi la projection de OO_1 sous l'angle γ, donc aussi
$$\cos\gamma = \frac{MM_1}{OO_1} = \frac{t}{a}.$$

On a donc
$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a} \qquad \text{ou} \qquad ds = \frac{a\,dz}{t}.$$

Or on a

$$t\,dt = +ar\sin\theta\,d\theta,$$
$$z = r\cos\theta,$$
$$dz = -r\sin\theta\,d\theta;$$

donc

$$t\,dt = -a\,dz,$$

d'où

$$ds = -dt, \qquad s_0 - s = t.$$

3° Il résulte de la seconde question que M_1 décrit une courbe C_1 développante de C.

4° La développante M_1 est une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface développable engendrée par MM_1 tangente en M à la courbe C. Le plan osculateur à la courbe C est le plan tangent le long de la génératrice MM_1. On peut le déterminer comme plan tangent à la surface développable au point M_1. Il contient en ce point :

a. La génératrice M_1M;

b. La tangente à la courbe M_1.

Les deux tangentes sont dans le plan tangent à la sphère en M_1. Donc le plan tangent à la sphère en M_1 est le plan osculateur au point M à la courbe C.

5° Cherchons l'équation du plan tangent à la sphère en M_1. La sphère est

$$x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - a)^2 - r_1^2 = 0.$$

Le plan tangent au point $(x_1 y_1 z_1)$ est

$$Xx_1 + Yy_1 + (Z - a)(z_1 - a) - r_1^2 = 0,$$

où l'on a

$$x_1 = x + t\frac{dx}{ds},$$

$$y_1 = y + t\frac{dy}{ds},$$

$$z_1 = z + t\frac{dz}{ds}.$$

La distance de ce plan à l'origine est donnée par

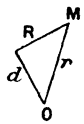
$$d^2 = \frac{[-a(z_1 - a) - r_1^2]^2}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - a)^2} = \frac{\left(a(z - a) + at\dfrac{dz}{ds} + r_1^2\right)^2}{r_1^2};$$

mais on a

$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a},$$

donc

$$at\frac{dz}{ds} = t^2 = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2ar\cos\theta = a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az.$$



Donc

$$d^2 = \frac{(az - a^2 + r_1^2 + a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az)^2}{r_1^2} = \frac{(r^2 - az)^2}{r_1^2}.$$

D'après le théorème de Meusnier

$$\begin{aligned} R^2 = r^2 - d^2 &= \frac{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}{r_1^2} \\ &= \frac{(rr_1 + r^2 - az)(rr_1 - r^2 + az)}{r_1^2}; \end{aligned}$$

on peut remplacer si l'on veut z par $r\cos\theta$.

6° On a pour la torsion

$$d = T\frac{dR}{ds} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{d}\frac{dR}{dz}\frac{dz}{ds}.$$

Tout est connu. On a

$$\frac{1}{d} = \frac{r_1}{r^2 - az};$$

$$R = \frac{\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}}{r_1^2},$$

$$\frac{dR}{dz} = \frac{a(r^2 - az)}{r_1\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}};$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{t}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}}{a}.$$

Donc

$$\frac{1}{T} = \frac{r_1}{r^2 - az}\,\frac{a}{r_1}\,\frac{r^2 - az}{\sqrt{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}}{a}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + r^2 - r_1^2 - 2az}{r^2 r_1^2 - (r^2 - az)^2}}.$$

On peut remplacer si l'on veut z par $r\cos\theta$.

Épreuve pratique. — *Calculer* $\displaystyle\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin\theta}}{\cos\theta}\,d\theta.$

Solution.

On pose $\displaystyle\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin\theta}}{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta$, et l'on fait $\sin\theta = x^2$, il vient

$$\int_0^x \frac{2x^2\,dx}{1 - x^4}.$$

On remarquera que

$$\frac{2x^2}{1 - x^4} = \frac{1}{1 - x^2} - \frac{1}{1 + x^2},$$

et l'on obtient rapidement

$$\int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin\theta}}{\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \sqrt{\sin\theta}}{1 - \sqrt{\sin\theta}} - \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\sin\theta}.$$

(Juillet 1903.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — I. *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$x^4\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 2x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = (x + a)^2.$$

II. *On considère la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

et l'ellipsoïde

$$x^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + y^2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} + z^2 = R^2,$$

où

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

On demande de calculer la portion de volume comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde et de la sphère.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de trouver les surfaces* S *qui coupent orthogonalement toutes les surfaces représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$z = k \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

Trouver celles des surfaces S *qui contiennent la droite*

$$y = 0, \qquad z = \alpha.$$

Ces dernières surfaces, quand α *varie, forment une surface* S; *trouver les surfaces* Σ *qui coupent orthogonalement toutes les surfaces de la famille* S.

(Juillet 1903.)

Grenoble.

ÉPREUVE ECRITE. — *Étant donnée l'équation*

$$9y(1-2y)^2y'^2 = 2 - 3y:$$

1° *Déterminer les lieux des points d'inflexion et des points de rebroussement des courbes intégrales ainsi que l'enveloppe de ces courbes.*

2° *Intégrer cette équation et vérifier, à l'aide de l'intégrale générale, les résultats précédemment déduits de l'équation différentielle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'intersection* S *du cône* $x^2+y^2=z^2$ *et du cylindre parallèle à* Oz *qui a pour trace, sur le plan des* xy, *la courbe* $r = ke^{\theta}$. *On demande de déterminer, pour un point quelconque* M *de* S' : *la tangente, le plan osculateur et sa caractéristique, les rayons de courbure et de torsion, et enfin le rayon de la sphère osculatrice. On cherchera en outre le lieu* S_1 *de la trace* M_1 *de la tangente à la courbe* S.

(Juillet 1903.)

Lyon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui définit les fonctions homogènes, à n variables, du degré m d'homogénéité.*

II. *Intégrer* $p^2+q^2=x+y$, *où* $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

SOLUTION.

On écrira

$$p^2-x=-q^2+y=\alpha=\text{const. arbitr.},$$

d'où

$$p=(x+\alpha)^{\frac{1}{2}},\qquad q=(y-\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

et l'intégrale complète

$$\frac{3}{2}(z+\beta)=(x+\alpha)^{\frac{3}{2}}+(y-\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

III. *z étant une fonction donnée de* $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ *et de* $\theta=\operatorname{arc\,tang}\dfrac{y}{x}$, *calculer l'expression*

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

SOLUTION.

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

IV. *On a la surface*

$$zr^2=f(\theta).$$

Calculer f de façon qu'en projection sur le plan des xy les deux lignes asymptotiques, issues d'un point de la surface, se coupent à angle droit. Étudier ces lignes asymptotiques et montrer que la torsion en un point ne dépend que de r.

SOLUTION.

On a évidemment

$$\Delta z = 0,$$

c'est-à-dire, tenant compte de la solution du problème III et tout calcul fait :

$$0 = \Delta z = r^{-4}(f'' + 4f) \qquad \text{et} \qquad f'' = -4f,$$

$$f(\theta) = \mathrm{K}\cos 2(\theta - \theta_0) \qquad (\mathrm{K},\ \theta_0 = \text{const. arbitr.}).$$

Il suffira, pour l'étude géométrique, de faire $\mathrm{K} = 1$, $\theta_0 = 0$; alors

$$z = \frac{\cos 2\theta}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Les lignes asymptotiques sont des cubiques gauches qui se projettent suivant les cercles

$$x^2 + y^2 - 2\mathrm{K}(x \pm y) = 0 \qquad (\mathrm{K} = \text{const. arbitr.}),$$

etc.

(Juillet 1903.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la fonction* pz *de Weierstrass construite avec les périodes* 2ω, $2\omega'$; *on suppose* ω, $\frac{\omega'}{i}$ *réelles.*

1° *Montrer qu'à deux valeurs imaginaires conjuguées de l'argument* z *correspondent deux valeurs imaginaires conjuguées de la fonction.*

2° *On pose* $Z = pz$. *Lorsque le point* z *décrit, dans son plan, une ligne* c, *le point* Z *décrit, dans son plan, une ligne correspondante* C.

Démontrer que si c *est une parallèle ou une perpendicu-*