Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 379-384
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__379_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1912.

(1901, p. 192.)

Étant donnés trois points fixes A_1, A_2, A_3 *et trois plans fixes* P_1, P_2, P_3, *trouver le lieu d'une droite* G *telle que les projections des points* A_1, A_2, A_3 *sur cette droite soient respectivement dans les plans* P_1, P_2, P_3.

[P. Appell (1).]

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

La méthode suivante peut donner l'équation tangentielle de la surface, débarrassée du facteur étranger à l'ombilicale; je montrerai seulement que la surface est de neuvième classe, par suite du neuvième ordre.

Rapportons la figure au trièdre des plans P, et, désignant par α, β, γ les cosinus des angles des axes, posons pour une direction (l, m, n)

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= l + \gamma m + \beta n, \\
\mathrm{M} &= \gamma l + m + \alpha n, \\
\mathrm{N} &= \beta l + \alpha m + n, \\
\Omega &= l\mathrm{L} + m\mathrm{M} + n\mathrm{N};
\end{aligned}$$

soient X, Y, Z des quantités liées à x, y, z comme L, M, N le sont à l, m, n. Le plan

$$ax + by + cz - d = 0$$

devant contenir une droite G, définissons cette droite en cou-

(1) Cf. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1900, p. 265.

pant le plan considéré par le plan

$$ux + vy + wz = 0,$$

et posons

$$(1) \qquad bw - cv = l, \qquad cu - aw = m, \qquad av - bu = n,$$

l, m, n étant ainsi les coefficients directeurs de la droite G.

Cette droite coupe le plan P_1 en un point M_1 dont les coordonnées sont données par les formules

$$x = 0, \qquad \frac{y}{w} = \frac{z}{-v} = \frac{d}{l},$$

et les coefficients directeurs de la droite A_1M_1 sont

$$lx_1, \quad ly_1 - dw, \quad lz_1 + dv,$$

l'indice 1 se rapportant aux coordonnées du point A_1 ; la condition de perpendicularité des droites A_1M_1 et G est

$$\mathrm{L}lx_1 + \mathrm{M}(ly_1 - dw) + \mathrm{N}(lz_1 + dv) = 0$$

ou

$$l(\mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}y_1 + \mathrm{N}z_1) = d(\mathrm{M}w - \mathrm{N}v),$$

ou encore

$$(2) \qquad l(l\mathrm{X}_1 + m\mathrm{Y}_1 + n\mathrm{Z}_1) = d(\mathrm{M}w - \mathrm{N}v).$$

On a de même les conditions

$$(3) \qquad m(l\mathrm{X}_2 + m\mathrm{Y}_2 + n\mathrm{Z}_2) = d(\mathrm{N}u - \mathrm{L}w),$$

$$(4) \qquad n(l\mathrm{X}_3 + m\mathrm{Y}_3 + n\mathrm{Z}_3) = d(\mathrm{L}v - \mathrm{M}u).$$

Il faut éliminer l, m, n, u, v, w entre les équations homogènes (1-4). L'élimination de u, v, w donne les trois équations homogènes en l, m, n

$$(5) \qquad al + bm + cn = 0,$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & al(l\mathrm{X}_1 + m\mathrm{Y}_1 + n\mathrm{Z}_1) + bm(l\mathrm{X}_2 + \ldots) \\ & \qquad + cn(l\mathrm{X}_3 + \ldots) + d\Omega = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & l\mathrm{L}(l\mathrm{X}_1 + m\mathrm{Y}_1 + n\mathrm{Z}_1) + m\mathrm{M}(l\mathrm{X}_2 + \ldots) \\ & \qquad + n\mathrm{N}(l\mathrm{X}_3 + \ldots) = 0; \end{aligned} \right.$$

on obtient les deux dernières en ajoutant les équations (2-4) multipliées par a, b, c d'une part, par L, M, N d'autre part. Quand on élimine l, m, n, pour avoir l'équation tangentielle de la surface en coordonnées a, b, c, d, comme les équations sont des degrés 1, 2, 3 en l, m, n, les coefficients de l'équation (5) entrent au sixième degré dans le résultant, ceux de l'équation (6) y entrent au troisième degré, et la relation entre a, b, c, d est du neuvième degré. On la calculerait assez facilement.

La relation (6) montre que le cône directeur de la surface est du troisième ordre seulement; le plan de l'infini contient donc six droites G : *a priori* ce sont les tangentes à l'ombilicale aux points où elle est coupée par la trace du cône directeur sur le plan de l'infini, et l'hypothèse $\Omega(l, m, n) = 0$ introduite dans le calcul donne bien a, b, c proportionnels à L, M, N.

Le plan de l'infini étant ainsi un plan tangent sextuple, l'équation tangentielle de la surface renferme d au troisième degré seulement; et, en effet, la seule des équations (5-7) qui contienne d est l'équation (6) dont les coefficients entrent au troisième degré dans l'équation tangentielle.

Chaque plan P contient trois droites G, que l'on obtient géométriquement comme tangentes communes à trois paraboles; les plans P sont donc des plans tangents triples et l'équation tangentielle de la surface renferme chacune des quantités a, b, c, au sixième degré seulement.

1922.

(1902, p. 96.)

Tout octaèdre à faces triangulaires dont les douze arêtes sont tangentes à une quadrique, a ses diagonales concourantes, et, réciproquement, si un octaèdre a ses diagonales concourantes, ses douze arêtes sont tangentes à une quadrique.

En déduire le théorème suivant :

« *Étant données deux quadriques, il est en général impossible d'inscrire à l'une un octaèdre dont les arêtes sont tangentes à la seconde; si la construction est possible, elle* *l'est d'une infinité de manières, et l'octaèdre dépend alors d'un paramètre.* »

Il y a exception si les deux quadriques sont inscrites l'une à l'autre : dans ce cas, l'octaèdre, quand sa construction est possible, dépend de trois paramètres.

(R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Après avoir résolu (*Nouvelles Annales,* 1899, p. 72) le problème de l'octaèdre à diagonales concourantes circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre, j'avais posé la question de l'octaèdre inscrit à une quadrique et dont les arêtes sont tangentes à une autre. M. Bricard obtient la réponse à cette question *en posant d'abord un fait fondamental.*

1. Soient AA′, BB′, CC′, les diagonales d'un octaèdre circonscrit à une quadrique. La quadrique étant tangente aux côtés des deux triangles CAB, C′AB, si les points de contact sont γ, α, β, α', β', les deux droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ rencontrent AB en un même point qui est le conjugué de γ par rapport à A et B; les deux droites $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont donc dans un même plan et rencontrent par suite la diagonale CC′ en même point. Les cordes de contact pour les quatre couples de tangentes (AC, AC′), (BC, BC′), (A′C, A′C′), (B′C, B′C′) rencontrent donc en un même point la diagonale CC′; les points A, B, A′, B′ sont dès lors dans un même plan qui est le plan polaire du point considéré, et les diagonales AA′, BB′ se rencontrent. Donc.... La réciproque est évidente, un octaèdre à diagonales concourantes pouvant être transformé par homographie en un octaèdre régulier.

Si l'on se donne C et C′, les deux cônes de sommets C et C′ circonscrits à la quadrique se coupent suivant deux coniques. Les quatre points A, B, A′, B′ sont sur une même de ces deux coniques; les deux points C et C′ doivent être tels qu'il existe des contours quadrangulaires inscrits à l'une des deux coniques et circonscrits à la section de la quadrique par le plan de cette conique.

2. Considérons alors un octaèdre inscrit à une quadrique S′ et dont les arêtes sont tangentes à une quadrique S; soit I le point de concours des diagonales. Le contour quadrangulaire ABA′B′ étant inscrit à la section σ' de la quadrique S′ par un plan, et circonscrit à la section σ de la quadrique S par ce même plan, le point I est un sommet du triangle conjugué commun aux deux coniques; de même....; *le point* I *est donc un sommet du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques.*

Le problème est réduit à obtenir un trièdre IA, IB, IC, tel que le plan de chaque face coupe S′ et S suivant deux coniques σ' et σ admettant des contours quadrangulaires de Poncelet, tel en outre que les arêtes IA et IB, par exemple, portent les diagonales du contour situé dans leur plan.

Les deux quadriques étant rapportées au tétraèdre conjugué commun, et leurs équations étant

$$(S) \qquad ax^2 + by^2 + \ldots = 0,$$

$$(S') \qquad a'x^2 + b'y^2 + \ldots = 0,$$

les plans $ux + vy + wz = 0$ qui les coupent suivant deux coniques ayant la propriété indiquée sont les plans tangents au cône

$$(\Sigma) \qquad (b'cd + c'bd - d'bc)\,u^2 + \ldots + \ldots = 0.$$

Le trièdre IA, IB, IC doit être circonscrit au cône et conjugué au cône

$$(\Sigma') \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0;$$

l'invariant Θ de ces deux cônes doit donc être nul, ce qui donne la condition

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} - \frac{3}{2}\frac{d'}{d} = 0;$$

par suite, les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S' = 0$ doivent vérifier la condition

$$(1) \qquad \lambda + \lambda' + \lambda'' - \frac{3}{2}\lambda''' = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

L'équation (Σ) se réduit à une identité si l'on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}, \qquad 2\frac{a'}{a} = \frac{d'}{d},$$

c'est-à-dire si les deux quadriques sont inscrites l'une à l'autre et vérifient la condition (1); le trièdre est alors astreint seulement à rester conjugué au cône Σ'. On peut prendre deux sphères concentriques, de rayons R et R $\sqrt{2}$.