Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 366-369

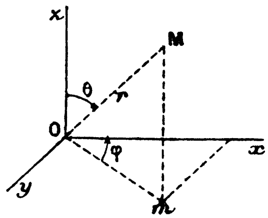
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__366_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Lille

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étudier l'effet d'un système de percussions sur un solide mobile autour d'un axe fixe. Théorie du centre de percussion.*

Problème. — *Un point matériel libre est défini par ses coordonnées polaires* (r, θ, φ). *Il est sollicité par une force*



dérivant de la fonction de force U

$$U = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta},$$

les fonctions f, g, h ne dépendant chacune que de la variable mise en évidence.

1° *Former l'expression de la force vive du point et les équations de Lagrange relatives aux paramètres* r, θ, φ;

2° *Montrer que ces équations s'intègrent par quadratures.*

SOLUTION.

L'équation de Lagrange relative à φ donne immédiatement l'intégrale première

$$(1) \qquad r^4 \sin^4\theta . \varphi'^2 = 2h(\varphi) + A.$$

En tenant compte de la valeur de φ'^2 fournie par cette équation, l'équation de Lagrange relative à θ donne

$$(2) \qquad r^4 . \theta'^2 = 2g(\theta) - \frac{A}{\sin^2\theta} + B.$$

Enfin l'équation des forces vives s'écrit, eu égard à (1) et à (2),

$$(3) \qquad r'^2 = 2f(r) - \frac{B}{r^2} + C,$$

A, B, C désignent des constantes. (3) donne r en fonction de t, (2) donne θ et (1) donne φ, et cela au moyen de trois quadratures. (Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Distribution des accélérations dans le cas du mouvement général d'un solide. Application au cas des mouvements parallèles à un plan.*

II. *Les extrémités d'une barre* AB *glissent sans frottement : l'une* A *sur une droite verticale* Oz, *l'autre* B *sur un plan horizontal* xOy. *Cette barre, de longueur* l, *est homogène et pesante; sa densité est l'unité. Au point* B *est appliquée une force dirigée suivant* $\overline{BO}$ *et proportionnelle à la distance* $\overline{BO}$.

1° *En désignant par* θ *et* φ *les angles* $\widehat{OAB}$ *et* $\widehat{xOB}$, *on formera les équations canoniques du mouvement de la barre relatives à ces paramètres;*

2° *On exprimera en fonction de* θ, *par des quadratures, le temps et l'angle* φ (*conditions initiales quelconques*);

3° *On formera et intégrera l'équation de Jacobi associée à la fonction d'Hamilton rencontrée au* 1°. *On reconnaîtra l'identité des équations finies du mouvement obtenues par la méthode de Jacobi avec les résultats obtenus au* 2°.

(Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Pendule sphérique.*

PROBLÈME. — *Un losange formé de quatre tiges pesantes et homogènes, de poids* p *et de longueur* a, *articulées à leurs extrémités, a un sommet fixe en* O ; *le sommet opposé* C *est assujetti à glisser sur la verticale de* O. *Au sommet* C *est appliqué un poids* P.

Le plan du losange est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de la verticale OC.

1° *Mouvement du losange dans son plan;*

2° *Position d'équilibre stable;*

3° *Vitesse de rotation pour laquelle, dans cette position d'équilibre, l'écartement des sommets* A *et* B *est égal à* a;

4° *Durée des petites oscillations du système supposé légèrement dérangé de sa position d'équilibre stable dans cette dernière hypothèse.*

SOLUTION.

1° Si θ est l'angle d'une des barres avec OC, le temps est donné en fonction de θ par une quadrature hyperelliptique

$$t = \int \sqrt{\frac{\frac{pa^2}{3g}(5 - 3\cos 2\theta) + \frac{Pa^2}{g} 2\sin^2\theta}{2a(P + 2p)\cos\theta + \frac{pa^2\omega^2}{3g}\sin^2\theta + h}}\, d\theta;$$

2° $\cos\theta = \dfrac{3g(P + 2p)}{2a\omega^2 p}$ si la valeur de $\cos\theta$ est plus petite que 1; sinon la position d'équilibre stable est $\theta = 0$;

3° $\omega^2 = \dfrac{\sqrt{3}\, g(P + 2p)}{ap}$;

4° $T = \pi\sqrt{\dfrac{a(2P + 5p)}{g(P + 2p)}}$.

(Novembre 1902.)