Nouvelles annales de mathématiques

R. Bricard

Sur une propriété des lignes de courbure des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 359-364

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__359_1>

[O5h]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES DE COURBURE DES SURFACES;

PAR M. R. BRICARD.

1. On doit à M. Raffy un théorème élégant dont voici l'énoncé :

Considérons une surface ayant ses lignes de courbure planes dans un système. Si par chaque point de l'une de ces lignes de courbure on construit le plan osculateur à la seconde ligne de courbure passant en ce point, tous les plans ainsi obtenus sont parallèles à une même droite.

M. Raffy exprime ce résultat en disant qu'une famille de lignes de courbure planes est *cylindrée* [1].

Je me propose, dans cette Note, de le rattacher à la proposition générale que voici :

Soient m *un point d'une surface* (S), [C] *et* [C'] *ses deux systèmes de lignes de courbure,* C *la ligne* [C] *et* C' *la ligne* [C'] *qui se croisent au point* m. *En chaque point de* C *menons le plan osculateur à la ligne* [C'] *qui passe par ce point : ces divers plans osculateurs enveloppent une surface développable* (T). *Soit* L *la génératrice de* (T) *qui correspond au point* m; *soient enfin* (T') *la développable analogue à* (T) *qu'on peut définir au moyen de la ligne de courbure* C', *et* L' *la génératrice de* (T') *qui correspond au point* m. *Je dis que les droites* L *et* L' *sont rectangulaires.*

2. Pour démontrer ce théorème, considérons la représentation sphérique de la surface (S).

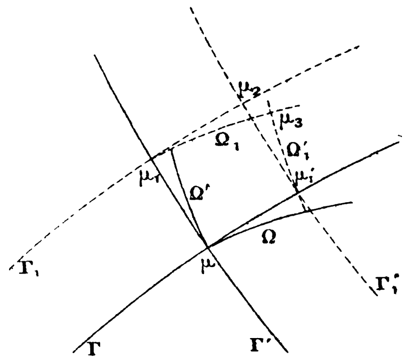
Désignons par (Σ) la sphère sur laquelle se fait la représentation, par Γ et Γ' les courbes tracées sur (Σ) qui sont les *images* des courbes C et C', par $[\Gamma]$ le système des lignes Γ, par $[\Gamma']$ celui des lignes Γ'. $[\Gamma]$ et $[\Gamma']$ forment deux systèmes de lignes orthogonales.

On sait que les lignes de courbure d'une surface et leurs images sphériques se correspondent par parallélisme des tangentes et, par suite, des plans osculateurs. Il résulte de là que si nous menons en chaque point de Γ le plan osculateur à la ligne $[\Gamma']$ qui passe en ce point, *la développable* (Θ) *enveloppée par ces plans a*

(1) Voir *Comptes rendus*, 1899, p. 285. Tout récemment, M. Raffy a déterminé toutes les surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré (*Bulletin de la Soc. math. de France*, 1903, p. 77).

ses génératrices parallèles à celles de (T). En particulier, la génératrice Λ qui correspond au point μ, commun aux courbes Γ et Γ', est parallèle à L. Soient de même (Θ') la développable analogue définie au moyen de la courbe Γ' et Λ' celle de ses génératrices qui correspond au point μ : Λ' est parallèle à L'. *Nous avons à montrer que les droites Λ et Λ' sont rectangulaires.*

3. Traçons à cet effet la courbe Γ_1, appartenant au système [Γ] et infiniment voisine de Γ. Soit de même Γ'_1 la courbe [Γ'] infiniment voisine de Γ' (*voir* la figure).



Désignons par μ, μ_1, μ_2, μ'_1 les sommets du quadrilatère infiniment petit formé par les courbes Γ, Γ', Γ_1, Γ'_1; traçons enfin les cercles Ω, Ω', Ω_1, Ω'_1, osculateurs aux courbes Γ, Γ', Γ_1, Γ'_1, respectivement aux points μ, μ', μ_1, μ'_1.

Prenons comme infiniment petit principal l'un des arcs $\mu\mu_1$, $\mu\mu'_1$, supposés de même ordre. Je dis que *l'angle sous lequel l'un quelconque des cercles Ω, Ω_1 est coupé par l'un quelconque des cercles Ω', Ω'_1 ne diffère d'un angle droit que d'un infiniment petit* *d'ordre supérieur au premier*. (L'un de ces angles, celui des cercles Ω et Ω', est rigoureusement droit.)

Considérons, par exemple, les cercles Ω_1 et Ω'_1, et soit μ_3 leur point de rencontre. Le cercle Ω_1 étant osculateur à Γ_1 en μ_1, les courbes Ω_1 et Γ_1 se confondent, dans les environs du point μ_1, aux infiniment petits du *troisième* ordre près. Il y a la même relation entre Ω'_1 et Γ'_1, dans les environs du point μ'_1. On a donc, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\text{arc } \mu_1 \mu_3 = \text{arc } \mu_1 \mu_2,$$
$$\text{arc } \mu'_1 \mu_3 = \text{arc } \mu'_1 \mu_2.$$

Cela posé, menons trois arcs de grands cercles, tangents, le premier à Ω_1 et Γ_1 en μ_1, le deuxième à Ω_1 en μ_3, le troisième à Γ_1 en μ_2. Soient θ et θ' les angles que font respectivement le deuxième et le troisième de ces arcs avec le premier. Si l'on appelle ρ le rayon sphérique du cercle Ω_1, c'est-à-dire le rayon de courbure sphérique de la courbe Γ_1 au point μ_1, on a

$$\text{arc } \mu_1 \mu_2 = \theta(\rho + \varepsilon),$$
$$\text{arc } \mu_1 \mu_3 = \theta'(\rho + \varepsilon'),$$

ε et ε' étant des infiniment petits. Les premiers membres étant égaux, on voit que l'on peut écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$\theta = \theta'.$$

Autrement dit, l'arc de grand cercle tangent à Γ_1 en μ_2 et l'arc de grand cercle tangent à Ω_1 en μ_3 font entre eux un angle infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

On voit de même que l'arc de grand cercle tangent à Ω'_1 en μ_3 et l'arc de grand cercle tangent à Γ'_1 en μ_2

font entre eux un angle infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Il en résulte immédiatement que l'angle en μ_3 des cercles Ω_1 et Ω'_1 et l'angle en μ_2 des courbes Γ_1 et Γ'_1 sont égaux, au même ordre d'approximation : comme le second de ces angles est droit, notre proposition est établie, en ce qui concerne les cercles Ω_1 et Ω'_1.

On verrait de même (et plus simplement encore) que l'angle sous lequel se coupent les cercles Ω' et Ω_1, et celui sous lequel se coupent Ω et Ω'_1 sont droits, toujours en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Cela établi, appelons α et β les points communs aux cercles Ω et Ω_1, c'est-à-dire les points où le cercle Ω touche son enveloppe, quand on passe de la courbe Γ à la courbe Γ_1. Soient α' et β' les points analogues relatifs au cercle Ω'.

Par les points α et β on peut faire passer deux cercles (Ω et Ω_1) coupant orthogonalement deux cercles passant par α' et β' (Ω' et Ω'_1). Autrement dit (α, β) *et* (α', β') *sont les couples de points bases de deux faisceaux de cercles orthogonaux tracés sur la sphère* (Σ).

On sait que, dans ces conditions, les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont conjuguées par rapport à la sphère (Σ) et, par suite, *rectangulaires* [1].

Mais la première de ces droites est visiblement la droite commune aux plans osculateurs à Γ et Γ_1, respectivement aux points μ et μ_1. C'est donc la génératrice de contact du plan osculateur à Γ en μ, avec la surface (Θ), c'est-à-dire la droite désignée plus haut par Λ. De même, $\alpha'\beta'$ n'est autre que la droite Λ'. *Il est*

[1] Des deux couples (α, β), (α', β') l'un est nécessairement réel, l'autre imaginaire.

donc établi que Λ *et* Λ' *sont rectangulaires, ce qui démontre le théorème énoncé à la fin du n° 1.*

4. Montrons à présent comment, de cette proposition générale, on déduit immédiatement le théorème de M. Raffy.

Supposons, par exemple, que toutes les lignes de courbure [C] sont planes. Conservons toutes les notations employées dans le n° 1. Quel que soit le point m sur C, la droite désignée par L est invariable, puisque c'est la droite d'intersection du plan de C et du plan de C_1 qui est la ligne de courbure [C] infiniment voisine de C.

La droite L' est donc perpendiculaire à une droite fixe, c'est-à-dire parallèle à un plan fixe. Par suite, la surface développable (T') est à plan directeur : *c'est nécessairement un cylindre,* ce qui est le résultat de M. Raffy.

Enfin, si les lignes [C] et les lignes [C'] sont toutes planes, nous retrouvons le théorème bien connu, dû à O. Bonnet :

Quand une surface a ses lignes de courbure planes dans les deux systèmes, les plans des lignes de courbure, dans chaque système, enveloppent un cylindre; de plus, les deux cylindres ainsi mis en évidence ont leurs génératrices rectangulaires.

Note de la Rédaction. — La Rédaction recevrait et insérerait avec plaisir une démonstration analytique du théorème établi géométriquement dans la Note précédente.