Nouvelles annales de mathématiques

E. Estanave

Du calcul explicite des intégrales définies du type $H_q = \int_o^\pi z^q \sin jz dz$, $J_q = \int_o^\pi z^q \cos jz dz$, avec quelques applications à la recherche de développements en séries trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 348-356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__348_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[C2h]

DU CALCUL EXPLICITE DES INTÉGRALES DÉFINIES DU TYPE

$$H_q = \int_0^\pi z^q \sin jz\, dz, \qquad J_q = \int_0^\pi z^q \cos jz\, dz,$$

AVEC QUELQUES APPLICATIONS A LA RECHERCHE DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. E. ESTANAVE.

Les intégrales dont il va être question se rencontrent dans le développement des fonctions en séries trigonométriques.

Dans les expressions de H_q et J_q, q et j désignent des nombres entiers. En appliquant la méthode de l'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} H_m &= \int_0^\pi z^m \sin jz\, dz \\ &= \left(-\frac{1}{j} z^m \cos jz\right)_0^\pi + \frac{m}{j}\int_0^\pi z^{m-1} \cos jz\, dz; \end{aligned}$$

de même

$$J_n = \int_0^\pi z^n \cos jz\, dz = \left(\frac{1}{j} z^n \sin jz\right)_0^\pi - \frac{n}{j}\int_0^\pi z^{n-1} \sin jz\, dz;$$

ou encore

$$\begin{aligned} H_m &= (-1)^{j+1}\frac{\pi^m}{j} + \frac{m}{j} J_{m-1}, \\ J_n &= -\frac{n}{j} H_{n-1}; \end{aligned}$$

ce sont les formules de récurrence.

On a

$$H_1 = (-1)^{j+1}\frac{\pi}{j}, \qquad J_1 = -\frac{2}{j^2} \qquad \text{(pour } j \text{ impair seulement)},$$

car J_1 est nul pour j pair. On peut écrire

$$J_1 = -[1 + (-1)^{j+1}]\frac{1}{j^2}.$$

Nous allons d'abord chercher à exprimer H_m en fonction de H_1 et de J_1, qui viennent d'être calculés.

On a les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l|l} H_1 = (-1)^{j+1}\dfrac{\pi}{j}, & J_1 = -[1+(-1)^{j+1}]\dfrac{1}{j^2}, \\ H_2 = \pi H_1 + \dfrac{2}{j} J_1, & J_2 = -\dfrac{2}{j} H_1, \\ H_3 = \pi^2 H_1 + \dfrac{3}{j} J_2, & J_3 = -\dfrac{3}{j} H_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ H_m = \pi^{m-1} H_1 + \dfrac{m}{j} J_{m-1}. & J_n = -\dfrac{n}{j} H_{n-1}. \end{array}\right.$$

Le calcul direct permet de reconnaître que les intégrales H_p et J_q se divisent chacune en deux catégories, suivant que p et q sont pairs ou impairs.

Occupons-nous des intégrales H_p. En posant $\frac{1}{j} = \lambda$, on a

$$\begin{aligned} H_2 &= \pi\; H_1 + 2\lambda J_1, \\ H_3 &= \pi^2 H_1 - 2.3\lambda^2 H_1, \\ H_4 &= \pi^3 H_1 - 3.4\lambda^2\pi\; H_1 - 2.3.4\lambda^3 J_1, \\ H_5 &= \pi^4 H_1 - 5.4\lambda^2\pi^2 H_1 + 2.3.4.5\lambda^4 H_1, \\ H_6 &= \pi^5 H_1 - 5.6\lambda^2\pi^3 H_1 + 3.4.5.6\lambda^4\pi\; H_1 + 2.3.4.5.6\lambda^5 J_1, \\ H_7 &= \pi^6 H_1 - 6.7\lambda^2\pi^4 H_1 + 4.5.6.7\pi^2\lambda^4 H_1 - 2.3.4.5.6.7\lambda^6 H_1, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On aperçoit la loi de formation des H_{2p} et des H_{2p+1}. Nous remarquons, en effet, que H_{2p} est un polynome homogène de degré $2p-1$ en π et λ, dont les puissances de π ont même parité et dont tous les coefficients, sauf le dernier, contiennent H_1. Mettons ce terme en J_1 à part, il a pour coefficient $2p!$ Les coefficients numériques des autres termes sont $\frac{2p!}{(n+1)!}$, n étant l'exposant de π dans le terme considéré. Quant aux signes, en faisant abstraction du terme en J_1 et supposant les H ordonnées suivant les puissances décroissantes de π, il sont alternativement positifs et négatifs, le premier étant toujours positif. Les signes des coefficients du terme en J_1 sont alternés quand on passe de H_{2p} à H_{2p+2}. Ces considérations, qui sont évidentes pour $p=1$, $p=2$, $p=3$, ..., vont nous permettre, en supposant la loi vraie pour p, d'écrire la formule

$$H_{2p}=(-1)^{p-1}2p!\,\lambda^{2p-1}J_1+H_1\sum_{q=1}^{q=p}(-1)^{p-q}\pi^{2q-1}\lambda^{2(p-q)}\frac{2p!}{2q!}.$$

Nous pouvons démontrer que cette loi est générale en montrant que l'on a

$$\begin{aligned}H_{2p+2}&=(-1)^{p}(2p+2)!\,\lambda^{2p+1}J_1\\&+H_1\sum_{q=1}^{q=p+1}(-1)^{p+1-q}\pi^{2q-1}\lambda^{2(p+1-q)}\frac{(2p+2)!}{2q!},\end{aligned}$$

formule obtenue en changeant p en $p+1$. En effet, si l'on multiplie la première par $(2p+1)(2p+2)\lambda^2$ et qu'on ajoute à la seconde, on a

$$(2)\qquad (2p+1)(2p+2)\lambda^2 H_{2p}+H_{2p+2}=\pi^{2p+1}H_1,$$

car le symbole $\sum_{q=1}^{q=p+1}$ peut se dédoubler en deux parties : l'une où q prend les valeurs 1, 2, 3, ..., p et l'autre $q=p+1$.

Or, la relation (1) résulte des formules de récurrence. Si, en effet, on y suppose

$$m = 2p + 2, \qquad n = 2p + 1,$$

on a

$$H_{2p+2} = \pi^{2p+1} H_1 + (2p + 2)\lambda J_{2p+1}.$$

Or

$$J_{2p+1} = -(2p + 1)\lambda H_{2p};$$

en remplaçant, on a la relation (2) ci-dessus; ce qui établit que la formule trouvée pour H_{2p} est générale.

On établirait pareillement la formule qui donne H_{2p+1} :

$$H_{2p+1} = H_1 \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^{p-q} \pi^{2q} \lambda^{2(p-q)} \frac{(2p+1)!}{(2q+1)!}.$$

En la supposant vraie pour p et démontrant qu'elle est vraie pour $p + 1$, on aurait à montrer pour cela que

$$(2p + 2)(2p + 3)\lambda^2 H_{2p+1} + H_{2p+3} = \pi^{2p+2} H_1,$$

relation qui résulte encore des formules de récurrence.

Transformons maintenant les formules qui donnent H_{2p} et H_{2p+1}; pour cela, remplaçons, dans H_{2p+1}, H_1 par la valeur calculée, ainsi que λ. Il vient

$$H_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}} \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^{p+j+1-q} \frac{(j\pi)^{2q+1}}{(2q+1)!}.$$

Si nous considérons le développement limité qui se trouve sous le signe $\sum$, nous reconnaissons qu'il peut s'écrire

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^{n-q} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}$$

en posant $n = p + j + 1$ et $j\pi = x$.

Or, ceci est le développement de $(-1)^n \sin x$ suivant les puissances de x, limité au terme en x^{2p+1}. Désignons par le symbole $[\sin x]_{2p+1}$ le développement de $\sin x$ limité au terme en x^{2p+1}. Alors, avec ces notations, H_{2p+1} s'écrit

$$H_{2p+1} = (-1)^{p+j+1} \frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}} [\sin j\pi]_{2p+1}.$$

Un calcul semblable conduit à l'expression de H_{2p},

$$H_{2p} = \frac{2p!}{j^{2p+1}} \left\{ (-1)^p + (-1)^{p+j+1} [\cos j\pi]_{2p} \right\}.$$

De même l'on a

$$J_{2p} = (-1)^{p+j+1} \frac{2p!}{j^{2p+1}} [\sin j\pi]_{2p-1},$$

$$J_{2p+1} = -\frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}} \left\{ (-1)^p + (-1)^{p+j+1} [\cos j\pi]_{2p} \right\};$$

ce sont les formules qui permettront de calculer H_m et J_n.

Nous pouvons donc écrire

$$\int_0^\pi z^{2p+1} \sin jz\, dz = (-1)^{p+j+1} \frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}} [\sin j\pi]_{2p+1},$$

$$\int_0^\pi z^{2p} \sin jz\, dz = \frac{2p!}{j^{2p+1}} \left\{ (-1)^p + (-1)^{p+j+1} [\cos j\pi]_{2p} \right\},$$

$$\int_0^\pi z^{2p} \cos jz\, dz = (-1)^{p+j+1} \frac{2p!}{j^{2p+1}} [\sin j\pi]_{2p-1},$$

$$\int_0^\pi z^{2p+1} \cos jz\, dz = -\frac{(2p+1)!}{j^{2p+2}} \left\{ (-1)^p + (-1)^{p+j+1} [\cos j\pi]_{2p} \right\}.$$

On trouve dans les *Nouvelles Tables d'intégrales définies* de Bierens de Haan (Table 218) deux cas particuliers de ces formules, cas relatifs à $p = 0$ et $p = 1$.

Applications. — Nous pouvons nous servir de ces formules pour établir des développements en série. Si, dans la première, on fait $p = 0$, on a

$$\int_0^\pi z \sin jz \, dz = \frac{(-1)^{j+1}\pi}{j};$$

par suite

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z}{2} \sin jz \, dz = (-1)^{j+1}\frac{1}{j}.$$

Or, si l'on considère la fonction $\frac{z}{2}$ développée en série trigonométrique

$$\frac{z}{2} = A_1 \sin z + A_2 \sin 2z + \ldots + A_j \sin jz + \ldots;$$

si l'on multiplie les deux membres par $\sin jz \, dz$, et si l'on intègre de o à π, on a

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z}{2} \sin jz \, dz;$$

par suite

$$A_j = (-1)^{j+1}\frac{1}{j}.$$

On a donc, en donnant à j les valeurs entières 1, 2, 3, ...,

$$\frac{z}{2} = \sin z - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \frac{\sin 4z}{4} + \ldots$$
$$+ (-1)^{j+1}\frac{\sin jz}{j} + \ldots,$$

développement connu, que nous retrouvons ici pour la vérification des formules établies.

De même, si dans la troisième intégrale on fait $p = 1$, on a

$$\int_0^\pi z^2 \cos jz \, dz = (-1)^j \frac{2\pi}{j^2}$$

et, par suite,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z^2}{4}\cos jz\,dz = \frac{(-1)^j}{j^2}.$$

Si l'on considère la fonction $\frac{z^2}{4}$ développée en série trigonométrique

$$\frac{z^2}{4} = A_0 + A_1 \cos z + A_2 \cos 2z + A_3 \cos 3z + \ldots,$$

on a, d'après la méthode de Fourier,

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{z^2}{4}\cos jz\,dz = \frac{(-1)^j}{j^2};$$

d'où

$$\frac{z^2}{4} = A_0 - \frac{\cos z}{1^2} + \frac{\cos 2z}{2^2} - \frac{\cos 3z}{3^2} + \ldots.$$

Pour déterminer A_0, on peut multiplier les deux membres par dz et intégrer de o à π; on a

$$A_0 = \frac{\pi^2}{12},$$

d'où le développement connu

$$\frac{z^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos z}{1^2} + \frac{\cos 2z}{2^2} - \frac{\cos 3z}{3^2} + \ldots.$$

De même, si dans la quatrième intégrale nous faisons $p = 0$, nous aurons

$$\int_0^\pi z\cos jz\,dz = -\frac{1}{j^2}[1 + (-1)^{j+1}].$$

Or, considérons le développement

$$z = A_0 + A_1 \cos z + A_2 \cos 2z + \ldots + A_j \cos jz + \ldots,$$

on a

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi z\cos jz\,dz = -\frac{2}{\pi j^2}[1 + (-1)^{j+1}],$$

ce qui conduit au développement

$$\frac{\pi z}{4} = A_0 - \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos(2j+1)z.$$

Pour déterminer la constante A_0, multiplions les deux membres par dz et intégrons de o à π, on a

$$A_0 = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi z}{4} = \cos z + \frac{1}{3^2}\cos 3z + \frac{1}{5^2}\cos 5z + \ldots.$$

En considérant la deuxième intégrale pour $p=1$, on a

$$\int_0^{\pi} z^2 \sin jz\, dz = \frac{2}{j^3}\left[-1 + (-1)^j\left(1 - \frac{j^2\pi^2}{2}\right)\right].$$

Or, si l'on prend

$$z^2 = A_1 \sin z + A_2 \sin 2z + \ldots + A_j \sin jz + \ldots,$$

on a

$$A_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z^2 \sin jz\, dz = \frac{4}{\pi j^3}\left[-1 + (-1)^j\left(1 - \frac{j^2\pi^2}{2}\right)\right].$$

On est ainsi conduit, en donnant à j les valeurs 1, 2, 3, ..., à la formule

$$z^2 = -\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin z}{1^3} + \frac{\sin 3z}{3^3} + \ldots\right) + 2\pi\left(\frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \ldots\right)$$

ou, en remplaçant la deuxième série par sa valeur, à

$$\frac{\sin z}{1^3} + \frac{\sin 3z}{3^3} + \frac{\sin 5z}{5^3} + \ldots = \frac{\pi z(\pi - z)}{2^3},$$

résultat connu.

Nous avons ainsi, pour la vérification des calculs, retrouvé certains résultats connus, en donnant à p des valeurs particulières.