Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 326-333

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__326_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Mouvement d'un mobile sollicité d'un centre fixe par une force* $f\left(\frac{m}{r^2}+\frac{n}{r^3}\right)$ *et animé d'une vitesse initiale.*

SOLUTION.

On peut supposer la masse du mobile égale à 1. On appliquera les théorèmes des aires et des forces vives. Les intégrales obtenues sont trigonométriques ou logarithmiques. Soient r_0, v_0, φ_0 le rayon vecteur initial, la vitesse initiale et l'angle de la vitesse initiale avec le vecteur, il y a deux cas principaux à distinguer :

1° Si

$$r_0^2 v_0^2 \sin^2\varphi_0 > n,$$

les intégrales qui se présentent sont trigonométriques et les résultats se rapprochent de ceux que donne la loi de Newton. Si

$$v_0^2 > \frac{2fm}{r_0}+\frac{n}{r_0^2},$$

on a une courbe présentant un rayon vecteur minimum et des branches infinies. Si

$$v_0^2 < \frac{2fm}{r_0}+\frac{n}{r_0^2},$$

la courbe a un rayon vecteur maximum et un rayon vecteur minimum.

2° Si

$$r_0^2 v_0^2 \sin^2 \varphi_0 < n,$$

les intégrales sont logarithmiques; la courbe admet l'origine comme point asymptote. Si

$$v_0^2 < \frac{2fm}{r_0} + \frac{n}{r_0^2},$$

il y a un parallèle maximum. Si

$$v_0^2 > \frac{2fm}{r_0} + \frac{n}{r_0^2},$$

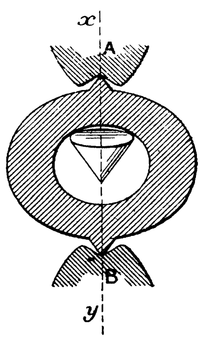
la courbe s'étend à l'infini.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Tracé d'une came.*

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *On considère un système matériel soumis à des liaisons moyennant lesquelles le système admet une fonction des forces; démontrer que toute position du système pour laquelle la fonction des forces prend une valeur minima est une position d'équilibre stable;*

2° *On considère le système d'un solide invariable* PESANT *tournant sans frottement autour d'un axe* VERTICAL *xy et*



d'une masse pesante glissant sans frottement sur la surface d'un cône de révolution dont l'axe est xy et qui est lié invariablement au solide.

Déterminer le mouvement de ce système et les valeurs MAXIMA *et* MINIMA *de la somme des réactions des appuis de l'axe estimées parallèlement à cet axe.*

Achever ce dernier calcul dans le cas où la vitesse initiale de la petite masse pesante est perpendiculaire au plan de cette masse et de l'axe xy. (Novembre 1902.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY *et la chaînette*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

un triangle ABC, *dont l'angle* A *est égal à* 90° *et le côté* AB *à a, glisse sur* OXY *de manière que* AC *reste tangent à la chaînette et que le sommet* B *parcoure* OX *avec une vitesse constante $a\lambda$. Trouver, pour une position donnée de* ABC, *le centre instantané, le cercle des inflexions, le lieu des points où l'accélération tangentielle est nulle. Déterminer l'accélération du point* A *en fonction de l'angle α de* AC *avec* OX.

Le centre instantané est au point où AC *touche la chaînette, l'accélération de* A *a pour composantes*

$$\frac{dv}{dt}\ \lambda^2 a \cos^2\alpha, \qquad \frac{v^2}{\rho} = \lambda^2 a \sin\alpha\cos\alpha.$$

II. *Mouvement d'un point* M *assujetti à rester sur une sphère et attiré vers un diamètre* ZZ' *par une force* $\dfrac{m\lambda^2 R^4}{u^3}$, *$\lambda$ étant une constante, u la distance de* M *à* ZZ'. *Pression sur la sphère.*

Cas où, à l'instant initial, M *est sur le grand cercle perpendiculaire à* ZZ', *sa vitesse faisant un angle de* 45° *avec cet axe.*

La pression est constante

$$m\,R\left(\theta_0'^2 + \psi_0'^2 \sin^2\theta_0 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta_0}\right);$$

dans le cas particulier, équations de la forme

$$dt = \pm \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{\omega^2 + (\lambda^2 - 2\omega^2)\cos^2\theta}},$$

$$d\psi = \pm \frac{\omega \, d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{\omega^2 + (\lambda^2 - \omega^2)\cot^2\theta}}$$

$$(\omega = \theta'_0 = \psi'_0).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer le poids de l'air en équilibre relatif dans un cylindre droit, de* 1^m *de hauteur, de* 2^m *de rayon de base, faisant* 50 *tours par seconde autour de son axe et communiquant avec l'atmosphère par deux trous aux centres des bases. Pression atmosphérique :* 1^{kg} *par centimètre carré; poids de* 1^l *d'air :* $1^g,29$; $g = 9^m,81$.

Le poids cherché est 7471^{8g}. (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Figure d'équilibre d'un fil contenu dans un plan et dont chaque élément ds est repoussé d'une droite* OX *du plan par une force perpendiculaire à* OX *et égale au quotient de ds par le carré de sa distance à la droite.*

SOLUTION.

Les équations connues, avec $y > 0$, donnent

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = a\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{c}\right), \qquad \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a^2 y}{c} + \frac{a^2}{c^2} - 1,$$

a et c étant des constantes dont la première est > 0; $\frac{1}{y}$ doit être $>$ la plus grande des valeurs, $\frac{1}{\alpha}$, qui annulent $\frac{dy^2}{dx^2}$; si $\alpha > 0$, y devra être compris entre 0 et α, forme rappelant la cycloïde; si $\alpha < 0$, on a une courbe infinie; pour $\frac{1}{c} = 0$, on a un cercle.

II. *Dans un plan vertical, un disque circulaire pesant de centre* A *est assujetti à rouler sans glisser sur un disque fixe et égal* O : *l'angle de* OA *avec la verticale ascendante* OZ *ayant pour cosinus* $\frac{7}{8}$, *le disque* A *est abandonné* *sans vitesse à l'action de son poids; déterminer son mouvement.*

SOLUTION.

On trouve aisément :

$$\frac{3}{2}\,MR^2 \times 4\,\frac{d\theta^2}{dt^2} = 4\,Mg\left(\frac{7}{8} - \cos\theta\right), \qquad N = \frac{7}{3}\,Mg\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right).$$

III. *Mouvement d'un cube homogène, soustrait à toute action extérieure, autour d'un de ses sommets.*

(Novembre 1902.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une circonférence homogène de rayon* R *et de masse* $2\lambda^2 m$ *peut librement tourner autour d'un diamètre vertical fixe.*

Un point matériel M *pesant et de masse* m *peut librement glisser sur cette circonférence sans pouvoir la quitter.*

A l'instant initial, la circonférence est animée d'une rotation ω *autour de son diamètre fixe et la vitesse relative du point* M *sur cette circonférence est nulle.*

Étudier le mouvement du système, indiquer les différentes formes de la trajectoire sphérique décrite par le point M *et calculer, en fonction de la position du système, la réaction de la circonférence sur le point* M.

SOLUTION.

En définissant la position de la circonférence par un angle θ et celle du point M par l'angle φ du rayon avec la verticale descendante, appliquant le théorème des forces vives et le principe des aires, on a deux intégrales premières qui donnent immédiatement

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\left(\frac{2g}{R}\cos\varphi + h\right)(\lambda^2 + \sin^2\varphi) - C^2}{\lambda^2 + \sin^2\varphi},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\lambda^2 + \sin^2\varphi}.$$

Si l'on pose $u = \cos\varphi$,

$$F(u) = \left(\frac{2g}{R}u + h\right)(\lambda^2 + 1 - u^2) - C^2,$$

la discussion se ramène à l'étude du signe de $F(u)$ qui, en vertu des conditions initiales, admet la racine u_0; la substitution des valeurs $\pm\sqrt{\lambda^2+1}$ montre que les trois racines sont réelles, l'une d'elles étant inférieure à -1; quant à la troisième, elle est forcément comprise entre -1 et $+\sqrt{\lambda^2+1}$; elle peut donc être comprise dans l'un quelconque des trois intervalles

$$-1,\quad u_0,\quad +1,\quad +\sqrt{\lambda^2+1},$$

et cela dépend, comme on le voit facilement sur l'équation $F(u)=0$ débarrassée de la solution u_0, de la position de ω^2 par rapport aux deux quantités

$$H=\frac{g}{Ru_0},\qquad H'=\frac{2g\lambda^2}{R(\lambda^2+1-u_0^2)(1+u_0)}.$$

Si $u_0<0$, H est négatif et la trajectoire de M est une espèce de rosace tracée sur la sphère et ayant pour nœud le point le plus bas ou bien une espèce de sinusoïde sphérique comprise entre deux parallèles suivant que ω^2 est inférieur ou supérieur à H'. Dans les deux cas la trajectoire est au-dessous du parallèle initial.

Si $u_0>0$, H et H' sont tous deux positifs et $H>H'$. On trouve encore la courbe en rosace ou la courbe sinusoïdale suivant que ω^2 est inférieur ou supérieur à H', mais, dans ce dernier cas, la trajectoire est au-dessous ou au-dessus du parallèle initial suivant que ω^2 est inférieur ou supérieur à H.

Comme cas limites, on voit que si ω^2 est égal à H', $F(u)$ admet la racine $+1$ et le temps devient infini quand φ tend vers $\frac{\pi}{2}$. La trajectoire est une sorte de spirale asymptote au point le plus bas de la sphère; enfin, si ω^2 est égal à H, ce qui ne peut arriver que si $u_0>0$, c'est-à-dire si le parallèle initial est au-dessous du centre, la trajectoire est un parallèle décrit d'un mouvement uniforme.

Pour calculer facilement les deux composantes de la réaction normale il suffit d'écrire en coordonnées polaires ε, θ, φ, les équations du mouvement du point M considéré comme entièrement libre, puis d'y remplacer r par la valeur constante R et les dérivées de θ et φ par leurs expressions en fonction de φ déduites des équations du mouvement du système.

Épreuve pratique. — *On a un parallélépipède rectangle* ABCD, A′B′C′D′ *solide et homogène; on considère les deux droites indéfinies fixes* D *et* Δ *confondues avec* AB *et* C′B′, *puis le plan fixe* P *mené par* D *perpendiculairement à* Δ. *On suppose que le parallélépipède soit lancé à partir de la position précédente et ne puisse se mouvoir qu'en satisfaisant aux conditions suivantes :* 1° *le sommet* A *reste sur la droite fixe* D; 2° *le sommet* C′ *reste sur la droite fixe* Δ; 3° *le sommet* B *reste sur le plan fixe* P.

On pose $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, *on désigne par m la masse du parallélépipède, par v_0 la vitesse initiale de* A *sur la droite* D *et l'on demande d'exprimer au moyen de a, b, c, m, v_0 la force vive initiale du solide.*

Solution.

On trouve facilement la relation entre les vitesses initiales v_0 et u_0 de A sur D et C′ sur Δ et, au moyen de u_0, v_0, on a immédiatement la vitesse du centre de gravité milieu de AC′.

Pour avoir la force vive dans le mouvement autour du centre de gravité, il faut calculer les composantes p, q, r de la rotation initiale suivant les axes du parallélépipède.

La translation du centre de gravité étant connue, si, au moyen des formules générales des vitesses, on exprime que la vitesse de A est sur D, que celle de C′ est sur Δ et que celle de B est dans P, on a cinq équations linéaires se réduisant à trois et déterminant les valeurs de p, q, r à l'instant initial. Le calcul des moments d'inertie du parallélépipède et l'application du théorème de König permettent alors de trouver l'expression de la force vive initiale en fonction des données.

(Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — *Une tige homogène horizontale* AOB *peut librement tourner autour d'un axe vertical fixe* O*z*. *Une autre tige pesante* CAD *normale à* AB *peut librement tourner autour d'elle. Étudier le mouvement du système. Étudier d'une façon détaillée le cas où le système part du repos.*

Solution.

En appelant θ l'angle dont tourne la tige AB et φ celui que fait la tige CD avec la verticale, on calcule la force vive du système; elle ne contient pas θ et il en est de même de la fonction de forces; on a donc deux intégrales immédiates, l'une par le théorème des forces vives, l'autre par l'équation de Lagrange relative au paramètre θ. On en déduit une équation de la forme

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{F(\varphi)},$$

et l'étude du signe de $F(\varphi)$ se ramène à l'étude d'un polynome du troisième degré en $\cos\varphi$, polynome dont les trois racines sont toujours réelles. Le mouvement de rotation de CD autour de AB est périodique, il peut être oscillatoire de deux façons différentes ou encore révolutif.

θ est donné en fonction de φ par une quadrature

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = R(\cos\varphi) + \frac{K}{\sqrt{F(\varphi)}},$$

et, à chaque période, θ augmente d'une quantité constante.

Si le système part du repos le mouvement de CD est toujours oscillatoire et la constante K étant nulle, le mouvement de rotation de AB est une oscillation périodique.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne une parabole de paramètre* $\frac{1}{2}$ *et une droite* Oz *issue de son sommet et faisant avec l'axe un angle de* 45°. *On demande de déterminer complètement l'ellipsoïde central d'inertie du solide homogène et de densité* 1 *engendré par la rotation autour de* Oz *du segment de parabole limité par cette droite.*

(Novembre 1902.)