Nouvelles annales de mathématiques

E. Iaggi

Sur la transformation des fonctions d'une variable

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 302-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__302_1>

[D]

SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE;

PAR M. E. JAGGI.

SECOND MÉMOIRE.

8. Nous avons, dans notre premier Mémoire, étudié les propriétés des substitutions; nous terminons et complétons ce travail par la détermination des fonctions F et Φ, lorsque les groupes de transformation ($F\Phi$) et (ΦF) sont donnés. Si l'on remarque que les substitutions s de (F) et σ de (Φ) sont déterminées par les groupes donnés ($F\Phi$), (ΦF) (propriété I), les équations différentielles linéaires dont nous avons parlé ne sont autres que celles qu'on peut former avec les s et σ de (F) et de (Φ).

Mais nous allons les former directement au moyen des t et τ et cette formation constituera une première méthode de détermination des fonctions F et Φ dont les groupes de transformation sont donnés.

Première méthode. — Nous nous placerons dans le cas de deux fonctions *complètes uniformes* F et Φ; quoique la méthode s'applique à certains cas de fonctions multiformes ponctales, et même linéales et aréales, ces derniers cas sont soumis à certaines conditions que nous ne pourrons déterminer que dans la suite.

Supposons d'abord qu'il existe des fonctions entières des groupes donnés; nous poserons, en supprimant les accents pour simplifier,

$$t = x + r, \qquad \tau = x + \rho.$$

Les fonctions r, ρ sont, comme les fonctions t, τ, racines simples des équations

$$(22) \qquad \begin{cases} \Phi(x) = F(t) = F(x + r), \\ F(x) = \Phi(\tau) = \Phi(x + \rho); \end{cases}$$

les fonctions t et les fonctions τ ne sont en effet racines multiples de ces équations que lorsque x est en un point multiple des groupes.

Les fonctions F et Φ, étant supposées entières, sont développables par la série de Taylor dans une région que nous supposerons comprendre tous les transformés t et τ de x. Les équations (22) prennent alors la forme suivante :

$$(23) \qquad \begin{cases} \Phi(x) = F(x) + r\,F'(x) + r^2 \dfrac{F''(x)}{2} + \ldots, \\ F(x) = \Phi(x) + \rho\,\Phi'(x) + \rho^2 \dfrac{\Phi''(x)}{2} + \ldots. \end{cases}$$

Les racines de ces équations sont les fonctions r, ρ, supposées données, et *ce sont des racines simples*, x étant un point ordinaire autre qu'un point multiple des groupes de transformation.

Si, dans chacune de ces équations, on réunit tous les termes dans un même membre, on obtient une fonction entière de r et une fonction entière de ρ, dont on connaît les zéros, qui est décomposable en un produit de facteurs primaires et qui donne, par conséquent [1],

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum\left(l-\frac{1}{r}\right) &= \frac{F'}{F-\Phi}, \\ \sum\left(\lambda-\frac{1}{\rho}\right) &= \frac{\Phi'}{\Phi-F}, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions l et les fonctions λ sont certaines fonctions qui rendent convergentes les séries indiquées et qu'on peut annuler lorsque $\sum\frac{1}{r}$ et $\sum\frac{1}{\rho}$ sont convergentes.

Posons

$$A = e^{\int\sum\left(l-\frac{1}{r}\right)dx}, \qquad B = e^{\int\sum\left(\lambda-\frac{1}{\rho}\right)dx},$$

$$(25)\qquad \frac{A'}{A} = \frac{F'}{F-\Phi}, \qquad \frac{B'}{B} = \frac{\Phi'}{\Phi-F}.$$

On a alors

$$\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B} = \frac{F'-\Phi'}{F-\Phi},$$

d'où

$$F-\Phi = cAB,$$

c étant une constante. Les équations (25) s'écrivent alors

$$(26)\qquad F' = cBA', \qquad \Phi' = -cAB',$$

d'où, avec deux constantes c, c',

$$(27)\quad F(x) = c'+c\int BA'\,dx, \qquad \Phi(x) = c'-c\int AB'\,dx,$$

où les limites sont les mêmes dans les deux intégrales, car F et Φ se correspondent.

Considérons maintenant le cas général de deux fonc-

---

[1] *Voir* notre Note : *Sur les zéros des fonctions entières* (*Nouv. Ann.*, 1902).

tions uniformes méromorphes, et posons

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \qquad \Phi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

f_1, f_2, φ_1, φ_2 étant des fonctions entières. Les équations (22) sont alors

$$(28) \qquad \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{f_1(x+r)}{f_2(x+r)}, \qquad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x+\rho)}{\varphi_2(x+\rho)}.$$

Les r et les ρ sont des racines simples de ces équations, x n'étant pas un point multiple des groupes. Supposons les fonctions entières f et φ développables en séries de Taylor dans une région contenant tous les transformés t et τ de x; on aura alors, en écrivant simplement f, f', ..., φ, φ', ... pour $f(x)$, $f'(x)$, ..., $\varphi(x)$,

$$(29) \quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_1(x) f_2(x+r) - \varphi_2(x) f_1(x+r) = 0 \\ &\quad = (\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1) + r(\varphi_1 f_2' - \varphi_2 f_1') \\ &\quad\quad + \frac{r^2}{2}(\varphi_1 f_2'' - \varphi_2 f_1'') + \frac{r^3}{6}(\varphi_1 f_2''' - \varphi_2 f_1''') + \ldots, \\ &f_1(x)\varphi_2(x+\rho) - f_2(x)\varphi_1(x+\rho) = 0 \\ &\quad = (f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2) + \rho(f_1\varphi_2' - f_2\varphi_1') \\ &\quad\quad + \frac{\rho^2}{2}(f_1\varphi_2'' - f_2\varphi_1'') + \frac{\rho^3}{6}(f_1\varphi_2''' - f_2\varphi_1''') + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres sont des fonctions entières de r et de ρ respectivement dont on connaît les zéros et auxquels la décomposition en facteurs primaires est applicable. Par conséquent, si nous posons

$$(30) \quad \left\{\begin{aligned} &A_1 = \sum\left(l_1 - \frac{1}{r}\right), && B_1 = \sum\left(\lambda_1 - \frac{1}{\rho}\right), \\ &A_2 = \sum\left(l_2 - \frac{1}{r^2}\right), && B_2 = \sum\left(\lambda_2 - \frac{1}{\rho^2}\right), \\ &A_3 = \sum\left(l_3 - \frac{1}{r^3}\right), && B_3 = \sum\left(\lambda_3 - \frac{1}{\rho^3}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions $l_1, l_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ rendent convergentes les séries indiquées formées avec les fonctions r et les fonctions ρ données, on aura (*loc. cit.*)

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\varphi_1 f_2' - \varphi_2 f_1'}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = A_1,\\[2ex]
\dfrac{\varphi_1 f_2'' - \varphi_2 f_1''}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = A_2 + A_1^2,\\[2ex]
\dfrac{\varphi_1 f_2''' - \varphi_2 f_1'''}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = 2A_3 + 3A_2A_1 + A_1^3,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\[2ex]
\dfrac{f_1 \varphi_2' - f_2 \varphi_1'}{f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1} = B_1,\\[2ex]
\dfrac{f_1 \varphi_2'' - f_2 \varphi_1''}{f_1 \varphi^2 - f_2 \varphi_1} = B_3 + B_1^2,\\[2ex]
\dfrac{f_1 \varphi_2''' - f_2 \varphi_1'''}{f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1} = 2B_3 + 3B_2B_1 + B_1^3,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Or les équations écrites sur la première ligne donnent

$$\frac{\varphi_1 f_2' - \varphi_2 f_1' + f_2 \varphi_1' - f_1 \varphi_2'}{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1} = A_1 + B_1;$$

posant pour un instant

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\alpha = e^{\int A_1\,dx}, & \beta = e^{\int B_1\,dx},\\[2ex]
\dfrac{\alpha'}{\alpha} = A_1, & \dfrac{\beta'}{\beta} = B_1,
\end{array}\right.$$

on aura donc

$$(33)\qquad \varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1 = \alpha\beta,$$

la constante d'intégration pouvant rentrer dans α ou β qui ne sont déterminés qu'à un facteur constant près.

Les équations (31) s'écrivent alors

$$(34)\qquad \varphi_1 f'_2 - \varphi_2 f'_1 = \alpha\beta\,A_1 = \alpha'\beta,$$

$$(35)\qquad \varphi_1 f''_2 - \varphi_2 f''_1 = \alpha\beta(A_2 + A_1^2),$$

$$(36)\qquad \varphi_1 f'''_2 - \varphi_2 f'''_1 = \alpha\beta(2A_3 + 3A_2A_1 + A_1^3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(37)\qquad \varphi'_1 f_2 - \varphi'_2 f_1 = \alpha\beta\,B_1 = \alpha\beta',$$

$$(38)\qquad \varphi''_1 f_2 - \varphi''_2 f_1 = \alpha\beta(B_2 + B_1^2),$$

$$(39)\qquad \varphi'''_1 f_2 - \varphi'''_2 f_1 = \alpha\beta(2B_3 + 3B_2B_1 + B_1^3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations (33), (34), (35), linéaires par rapport à φ_1, φ_2, donnent l'équation

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} f_2 & f_1 & 1 \\ f'_2 & f'_1 & A_1 \\ f''_2 & f''_1 & A_1 + A_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dérivant (34) en tenant compte de (35), on trouve, en remarquant que $\frac{d}{dx}\alpha\beta = \alpha\beta(A_1 + B_1)$,

$$(41)\qquad \varphi'_1 f'_2 - \varphi'_2 f'_1 = \alpha\beta(A_1B_1 + A'_1 - A_2).$$

En dérivant (37) et tenant compte de (38) on aurait une autre expression de la même fonction, qu'on peut obtenir en permutant, dans la précédente, les A et les B de même indice; on en conclut la relation nécessaire suivante entre les t et les τ données :

$$(42)\qquad A'_1 - A_2 = B'_1 - B_2.$$

Cette remarque faite, dérivons (35) en tenant compte de (36); on trouve

$$(43)\qquad \begin{cases} \varphi'_1 f''_2 - \varphi'_2 f''_1 \\ \quad = \alpha\beta\big(B_1(A_2 + A_1^2) + A'_2 + 2A_1A'_1 - 2A_3 - 2A_2A_1\big). \end{cases}$$

Les équations (37), (41), (43), linéaires par rapport à φ'_1 et φ'_2, donnent l'équation

$$(44)\quad \begin{vmatrix} f_2 & f_1 & B_1 \\ f'_2 & f'_1 & B_1 A_1 + A'_1 - A_2 \\ f''_2 & f''_1 & B_1(A_2 + A_1^2) + A'_2 + 2A_1A'_1 - 2A_3 - 2A_2A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe les déterminants (40), (44), par rapport aux éléments de la troisième colonne, et si l'on élimine le mineur $(f'_2 f''_1 - f'_1 f''_2)$, on obtient l'équation

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_2 f''_1 - f_1 f''_2}{f_2 f'_1 - f_1 f'_2} &= \frac{2A_1(A'_1 - A_2) + A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2} \\ &= 2A_1 + \frac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2}. \end{aligned} \right.$$

Posons pour un instant

$$u = e^{\int\left(2A_1 + \frac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2}\right)dx}.$$

Nous aurons alors

$$(46)\qquad f_2 f'_1 - f_1 f'_2 = u,$$

$$(47)\qquad f_2 f''_1 - f_1 f''_2 = u',$$

et, au moyen de l'équation (40),

$$(48)\qquad f'_2 f''_1 - f'_1 f''_2 = A_1 u' - (A_2 + A_1^2) u.$$

Ces trois équations sont de la même forme que celles qui nous ont conduit à l'équation aux fonctions Θ relatives à un groupe donné de substitutions d'invariabilité. [*Détermination des fonctions, etc.* (*Nouv. Ann.*, 1902).]

En opérant de la même manière que dans ce cas, on trouve l'équation suivante, à laquelle satisfont f_1, f_2 et toutes les fonctions $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ dont les quotients sont les fonctions F cherchées,

$$uf'' - u'f' + (A_1 u' - (A_2 + A_1^2)u)f = 0$$

ou, en vertu de la valeur de u écrite plus haut,

$$(49)\quad \begin{cases} f'' - \left[2A_1 + \dfrac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2}\right] f' \\ \quad + \left[A_1^2 - A_2 + \dfrac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2} A_1\right] f = 0. \end{cases}$$

On obtiendrait de même l'équation aux fonctions φ :

$$(50)\quad \begin{cases} \varphi'' - \left[2B_1 + \dfrac{B'_2 - 2B_3}{B'_1 - B_2}\right] \varphi' \\ \quad + \left[B_1^2 - B_2 + \dfrac{B'_2 - 2B_3}{B'_1 - B_2} B_1\right] \varphi = 0. \end{cases}$$

Dans le cas où nous nous sommes placé, où F et Φ sont fonctions complètes uniformes, et où les fonctions f et φ sont uniformes entières, les fonctions f sont identiques aux fonctions entières Θ qu'on peut déterminer par les substitutions de (F) et qui sont les intégrales d'une équation de la forme (*loc. cit.*)

$$\Phi\Theta'' - \Phi'\Theta' + (\Phi'' - \Phi\Psi)\Theta = 0,$$

où Φ et Ψ sont formées au moyen des substitutions de (F) : il s'ensuit que cette équation est identique à l'équation (49) et l'on obtient par cette identification deux relations entre les quantités $r = t - x$ provenant du groupe de transformation (FΦ) et les *périodes* $p = s - x$ provenant du groupe (F). Les fonctions φ conduisent à des relations analogues entre les quantités $\rho = \tau - x$ et les *périodes* $\pi = \sigma - x$ de (Φ).

On peut obtenir une infinité de relations entre les t et les τ de la forme (42) par des moyens analogues à ceux qui ont servi à établir celle-ci; nous n'y insistons pas.

Remarquons encore que l'hypothèse faite que $F(x)$ et $\Phi(x)$ soient uniformes n'est pas *nécessaire,* car cette hypothèse ne nous a servis qu'à mettre F et Φ sous forme de quotients de fonctions entières auxquelles notre théorème sur les zéros des fonctions entières est toujours applicable (*Nouv. Ann.,* 1902); mais nous avons vu (*loc. cit.*) qu'il existe des fonctions complètes multiformes (ponctales, linéales ou aréales) qui se mettent sous forme de quotients de fonctions pseudo-entières (fonctions qui ne deviennent infinies pour aucune valeur finie de x), auxquelles la décomposition en facteurs et le théorème sur les zéros sont applicables. Dans tous les cas où les groupes $(F\Phi)$ et (ΦF) sont donnés, on pourra donc appliquer les équations (49) et (50); on doit observer seulement que, lorsque les séries

$$\sum\frac{1}{r}, \quad \sum\frac{1}{r^2}, \quad \sum\frac{1}{r^3},$$

$$\sum\frac{1}{\rho}, \quad \sum\frac{1}{\rho^2}, \quad \sum\frac{1}{\rho^3}$$

ne sont pas convergentes, il reste une ambiguïté dans le choix des fonctions l, λ à introduire (30); ce n'est que lorsque ces séries sont convergentes que tous les coefficients de (49), (50) sont bien déterminés. Cependant, dans le cas où $\sum\frac{1}{r^2}$ est convergente sans que $\sum\frac{1}{r}$ le soit, on peut le plus souvent (*loc. cit.*) annuler A_1 et faire

$$A_2 = -\sum\frac{1}{r^2}, \qquad A_3 = -\sum\frac{1}{r^3};$$

l'équation (49) est alors

$$f'' + \frac{A'_2 - 2A_3}{A_2} f' - A_2 f = 0.$$

Le cas que nous avons traité d'abord où il existe des fonctions entières F et Φ des groupes donnés est compris dans le cas général résolu par les équations (49) et (50); les fonctions f et φ sont alors elles-mêmes des fonctions F et Φ et les équations (49) et (50) doivent être satisfaites par $f = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, d'où les relations

$$(51)\quad \begin{cases} A_1^2 - A_2 + \dfrac{A'_2 - 2A_3}{A'_1 - A_2} A_1 = 0, \\ B_1^2 - B_2 + \dfrac{B'_2 - 2B_3}{B'_1 - B_2} B_1 = 0, \end{cases}$$

conditions nécessaires et suffisantes pour que, parmi les fonctions F et Φ des groupes donnés, il y en ait qui soient entières.

Seconde méthode. — Posons

$$(52)\quad \begin{cases} z = F(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}, \\ \zeta = \Phi(x) = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots}. \end{cases}$$

Les équations

$$\Phi(x) = F(t), \qquad F(x) = \Phi(\tau)$$

s'écrivent

$$(53)\quad \begin{cases} \zeta = \dfrac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots}, \\ z = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \dots}{\beta_0 + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots}. \end{cases}$$

Ces équations, qu'on peut mettre sous forme entière par rapport à t et τ,

$$a_0 - b_0\zeta + (a_1 - b_1\zeta)t + (a_2 - b_2\zeta)t^2 + \dots = 0,$$
$$\alpha_0 - \beta_0 z + (\alpha_1 - \beta_1 z)\tau + (\alpha_2 - \beta_2 z)\tau^2 + \dots = 0$$

ont pour racines *simples* les substitutions t et τ données.

Si l'on pose

$$(54)\quad\begin{cases}\mathcal{A}_1=\sum\left(m_1-\frac{1}{t}\right), & \mathcal{B}_1=\sum\left(\mu_1-\frac{1}{\tau}\right),\\ \mathcal{A}_2=\sum\left(m_2-\frac{1}{t^2}\right), & \mathcal{B}_2=\sum\left(\mu_2-\frac{1}{\tau^2}\right),\\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots,\end{cases}$$

où les fonctions $m\dots$, $\mu\dots$ rendent convergentes les séries indiquées, on aura

$$(55)\quad\begin{cases}\dfrac{a_1-b_1\zeta}{a_0-b_0\zeta}=\mathcal{A}_1,\\ \dfrac{a_2-b_2\zeta}{a_0-b_0\zeta}=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_2+\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_1^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{cases}$$

$$(56)\quad\begin{cases}\dfrac{\alpha_1-\beta_1 z}{\alpha_0-\beta_0 z}=\mathcal{B}_1,\\ \dfrac{\alpha_2-\beta_2 z}{\alpha_0-\beta_0 z}=\dfrac{1}{2}\mathcal{B}_2+\dfrac{1}{2}\mathcal{B}_1^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

Toutes les fonctions cherchées étant les transformations linéaires de z et de ζ, on peut prendre pour fonctions F et Φ les fonctions déterminées par les seconds membres d'une équation (55) et d'une équation (56); toutefois il restera à déterminer les coefficients d'une transformation linéaire de l'une au moyen de l'autre, pour que les deux fonctions obtenues *se correspondent* (¹).

La méthode que nous venons d'indiquer et qui

(¹) Les quantités m_1, m_2, ..., μ_1, μ_2, ... peuvent être telles pour que $\mathcal{A}_1$, et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$, et $\mathcal{B}_2$, ... se correspondent; c'est, par exemple, ce qui arrive lorsque les quantités m, μ sont toutes nulles.

est analogue à la seconde méthode que nous avons donnée (*Nouv. Ann.*, 1903) pour déterminer les fonctions $F(x)$ de groupe (F) donné, donne lieu à une discussion analogue. Pour ne point trop allonger cette Note, nous prions le lecteur de se reporter à la Note précédente et nous ne rappellerons que cette remarque : s'il existe un nombre ω tel que $\sum \frac{1}{t^\omega}$ soit convergente et que les séries $\sum \frac{1}{t^n}$ $(n = 1, 2, \ldots, \omega - 1)$ soient divergentes ou constantes, on a l'une des fonctions ζ cherchées du groupe de transformation (ΦF) par la fonction $\sum \frac{1}{t^\omega}$; la même remarque s'applique aux séries en τ.

Les deux méthodes que nous venons d'exposer pour la recherche des fonctions F et Φ dont les groupes de transformation sont donnés présentent les mêmes avantages et aussi les mêmes difficultés que les deux méthodes que nous avons données précédemment pour déterminer les fonctions $F(x)$ dont on donne le groupe de substitutions; pour la comparaison de ces méthodes il suffit de se reporter à la Note précédente. On appliquera facilement ces méthodes, à titre d'exercice, aux substitutions qui transforment $\sin x$ en $\cos x$, ou réciproquement, et à celles qui transforment $\operatorname{sn} x$ en $\operatorname{sn}(K + x)$ ou réciproquement.

La théorie générale que nous avons indiquée brièvement a de nombreuses et importantes applications; nous verrons notamment dans la suite comment elle conduit aux transformations de Lie pour les équations différentielles.