J. SIRE

Sur la multiplication par 5 d'une période de la fonction $\wp u$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 297-302
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__297_1>

[F5aα]

SUR LA MULTIPLICATION PAR 5 D'UNE PÉRIODE DE LA FONCTION $\wp u$;

PAR M. J. SIRE, à Nancy.

On sait que si

$$z = \wp\left(u \,\middle|\, \omega, \frac{\omega'}{5}\right)$$

est donné,

$$x = \wp(u \mid \omega, \omega')$$

s'obtient par la résolution d'une équation du cinquième degré. En effet, si l'on regarde z comme une fonction elliptique aux périodes 2ω, $2\omega'$, la formule de décomposition en éléments simples donne

$$z = c + \wp u + \left[\wp\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) + \wp\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right)\right] + \left[\wp\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) + \wp\left(u + \frac{4\omega'}{5}\right)\right];$$

la constante c étant définie par l'équation

$$c + 2\wp\left(\frac{2\omega'}{5}\right) + 2\wp\left(\frac{4\omega'}{5}\right) = 0.$$

Si l'on applique à chacune des parenthèses la formule

$$\wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{2(\wp u\, \wp v - \frac{1}{2}g_2)(\wp u + \wp v) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2},$$

et si l'on pose

$$a = p\left(\frac{2\omega'}{5}\right), \qquad b = p\left(\frac{4\omega'}{5}\right),$$

il vient

$$z = x - 2a - 2b + \frac{2(ax - \frac{1}{2}g_2)(x + a) - g_3}{(x - a)^2} + \frac{2(bx - \frac{1}{2}g_2)(x + b) - g_3}{(x - b)^2},$$

équation du cinquième degré en x qui admet pour racines

$$pu, \quad p\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right), \quad p\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right),$$
$$p\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right), \quad p\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right).$$

Je me propose de trouver une expression simple de la fonction cyclique de ces racines :

$$\psi(u) = pu + \alpha\, p\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) + \alpha^2 p\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) + \alpha^3 p\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right) + \alpha^4 p\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right),$$

où $\alpha = e^{\frac{2i\pi r}{5}}$, r désignant un nombre entier non multiple de 5. Je considère à cet effet la fonction

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_1(u) = &- \zeta u - \alpha\, \zeta\left(u - \frac{2\omega'}{5}\right) - \alpha^2 \zeta\left(u - \frac{4\omega'}{5}\right) \\ &- \alpha^3 \zeta\left(u - \frac{6\omega'}{5}\right) - \alpha^4 \zeta\left(u - \frac{8\omega'}{5}\right), \end{aligned} \right.$$

qui admet pour dérivée $\psi(u)$; si, dans cette fonction, je remplace u par $u + \frac{2\omega'}{5}$, j'obtiens

$$(2) \qquad \Psi_1\left(u + \frac{2\omega'}{5}\right) = \alpha\, \Psi_1(u) - 2\eta',$$

en remarquant que

$$\zeta\left(u+\frac{2\omega'}{5}\right)=\zeta\left(u-\frac{8\omega'}{5}\right)+2\eta'.$$

Posant

$$\Psi_1(u)=\Psi(u)-h,$$

il vient, en tenant compte de (2),

$$\Psi\left(u+\frac{2\omega'}{5}\right)=\alpha\,\Psi(u)+h(1-\alpha)-2\eta'.$$

Si la constante h est déterminée de telle façon que

$$h=\frac{2\eta'}{1-\alpha},$$

il en résulte

$$(3)\qquad \Psi\left(u+\frac{2\omega'}{5}\right)=\alpha\,\Psi(u)$$

$\left(\alpha=e^{\frac{2i\pi r}{5}},\ r \text{ non multiple de } 5\right)$. D'ailleurs

$$(4)\qquad \Psi(u+2\omega)=\Psi(u);$$

ceci résulte de ce que la somme $(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)$ des résidus qui figurent dans (1) est nulle.

Les relations (3) et (4) montrent que $\Psi(u)$ est dans le premier parallélogramme des périodes 2ω, $\frac{2\omega'}{5}$, une fonction à multiplicateurs constants 1 et α; elle admet dans ce parallélogramme comme pôle simple de résidu -1 le point $u=0$, puisque $\Psi_1(u)$ possède, d'après (1), dans le premier parallélogramme des périodes 2ω, $2\omega'$, comme pôles simples de résidu -1, les points $u=2k\frac{\omega'}{5}$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$; on a donc

$$(5)\qquad \Psi(u)=e^{\rho u}\frac{\sigma(u-v)}{\sigma u\,\sigma v},$$

ρ et v désignant des constantes que je vais déterminer.

Pour rendre le calcul plus clair, je poserai $\frac{\omega'}{5} = \omega'_1$ et je désignerai par η'_1 ce que devient η' quand on remplace ω' par ω'_1; utilisant des formules bien connues relatives à $\sigma(u \mid \omega, \omega'_1)$ on a

$$\Psi(u + 2\omega) = e^{2(\rho\omega - \eta v)}\,\Psi(u),$$
$$\Psi(u + 2\omega'_1) = e^{2(\rho\omega'_1 - \eta'_1 v)}\,\Psi(u);$$

pour que la fonction $e^{\rho u}\frac{\sigma(u-v)}{\sigma u\,\sigma v}$ admette les multiplicateurs 1 et α, il suffira de poser

$$\rho\omega - \eta v = 0,$$
$$\rho\omega'_1 - \eta'_1 v = \frac{\pi i r}{5},$$

ce qui donne

$$v = \frac{2r\omega}{5}, \qquad \rho = \frac{2r\eta}{5},$$

en remarquant que

$$\eta\omega'_1 - \eta'_1\omega = \frac{\pi i}{2}.$$

On a donc finalement

$$\Psi(u) = e^{\frac{2\eta u}{5}}\,\frac{\sigma\left(u - 2\frac{r\omega}{5}\right)}{\sigma u\,\sigma\left(\frac{2r\omega}{5}\right)}.$$

Cette relation permet de se rendre compte que $\Psi^5(u)$ admet les périodes 2ω, $2\omega'_1$; comme cette fonction admet l'origine comme pôle d'ordre 5, on a donc

$$\Psi^5(u) = a_0 + a_1\,p u + a_2\,p' u + a_3\,p'' u + a_4\,p''' u,$$

où pu, comme dans ce qui suivra, est la fonction construite avec les périodes 2ω, $2\omega'_1$. En remarquant que $\Psi^5(u)$ s'annule pour $u = v$ $\left(v = \frac{2r\omega}{5}\right)$, ainsi que ses quatre premières dérivées, on en déduit avec M. Kiépert,

$$\Psi^5(u) = C \begin{vmatrix} pu - pv & p'u - p'v & p''u - p''v & p'''u - p'''v \\ p'v & p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v \\ p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v \\ p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v & p^{\text{VI}}v \end{vmatrix},$$

C étant une constante qui se détermine en cherchant la limite de $[u\,\Psi(u)]^5$ pour $u = 0$.

Dérivant, il vient

$$5\,\Psi^4(u)\,\Psi'(u) = C \begin{vmatrix} p'u & p''u & p'''u & p^{\text{IV}}u \\ p'v & p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v \\ p''v & p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v \\ p'''v & p^{\text{IV}}v & p^{\text{V}}v & p^{\text{VI}}v \end{vmatrix},$$

et, puisque $\Psi'(u) = \psi(u)$, j'ai ainsi obtenu l'expression de $\psi(u)$ que je me proposais de retrouver. On peut en conclure facilement que l'équation du cinquième degré en $x = p(u \mid \omega, \omega')$ est résoluble par radicaux, quand en même temps que $z = p(u \mid \omega, \omega'_1)$ on donne la dérivée $p'(u \mid \omega, \omega'_1)$, les racines 5ièmes de l'unité et les invariants de la fonction $p(u \mid \omega, \omega'_1)$.

Le problème que je viens d'examiner n'est qu'un cas très particulier du problème traité par M. Kiépert dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle,* t. 76. L'auteur, pour calculer les n valeurs de $p(u \mid \omega, \omega')$ qui correspondent à $p\left(u \,\middle|\, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, part de la fonction

$$f(u) = e^{\rho u} \frac{\sigma(u - v)}{\sigma u \,\sigma v},$$

où

$$v = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n},$$

$$\rho = \frac{2\lambda\eta + 2\mu\eta'}{n},$$

λ et μ désignant des entiers, sans indiquer comment il a été amené à considérer cette fonction. La méthode que j'ai suivie, dans le cas où $n = 5$, montre suffisamment de quelle manière on peut introduire la fonction $f(u)$.