Certificats de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 277-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__277_1>

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère une famille de sphères passant toutes par un même cercle réel. On demande de démontrer que cette famille fait partie d'une infinité de systèmes triples orthogonaux et de déterminer d'une manière générale tous ces systèmes triples.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée la transformation ponctuelle définie par les équations*

$$X = yz, \qquad Y = zx, \qquad Z = xy,$$

elle fait correspondre à une direction partant du point (x, y, z) *et définie par les différentielles* dx, dy, dz *une direction partant de même du point* (X, Y, Z) *et définie par les différentielles correspondantes* dX, dY. dZ. *Déterminer les cas où les deux directions correspondantes sont parallèles.*

Appliquer la théorie au point pour lequel on a

$$x = y = z = 1.$$

(Octobre 1901.)

Épreuve écrite. — I. *On demande de déterminer tous les hélicoïdes qui sont des surfaces minima. Pour cela on déterminera la surface minima qui passe par une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit et dont le plan tangent en chaque point de cette hélice fait un angle constant avec l'axe du cylindre.*

Retrouver en particulier l'hélicoïde réglé à plan directeur et la surface minima de révolution.

II. *Déterminer les lignes de courbure de ces hélicoïdes.*

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation*

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - n\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

calculer : 1° *ses invariants;* 2° *ceux des équations qu'on en déduit en appliquant la méthode de Laplace.*

Intégrer l'équation dans le cas où $m = -n = 2$.

(Mars 1902.)

Épreuve écrite. — *Étant donnée une surface quelconque* (S) *et un point fixe* O *on fait correspondre à un point quelconque* M *de* (S) *le point* M′ *situé à la distance* 1 *sur le rayon* OM. *On établit ainsi une correspondance point par point entre la surface* (S) *et une sphère* (Σ) *de centre* O *et de rayon* 1.

Il existe sur la surface (S) *deux familles de lignes orthogonales auxquelles correspondent sur la sphère* (Σ) *deux familles de lignes orthogonales.*

I. *Montrer que l'une de ces familles de* (S) *est formée des courbes lieux des points dont la distance au point* O *demeure constante.*

II. *Déterminer complètement* (*en termes finis*) *les deux familles de* (S) *dans le cas où cette surface est un ellipsoïde à trois axes inégaux.*

Épreuve pratique. — I. *Former l'équation aux dérivées partielles dont dépend la différence des rayons de courbure principaux des surfaces admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure le système orthogonal pour lequel l'élément linéaire de la sphère* *prend la forme*

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

II. *Montrer que ce système sphérique orthogonal est formé de deux familles de cercles.* (Octobre 1902.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée une surface* (M), *déterminer les différentes congruences de droites jouissant de la propriété suivante : les droites étant liées respectivement aux plans tangents de la surface* (M), *la congruence reste constamment formée de normales à une surface, lorsqu'on déforme la surface* (M) *de façon qu'elle reste applicable sur sa forme primitive.*

II. *On suppose qu'une congruence de droites soit construite en menant par chaque point* M *d'une surface* (M) *une droite* MP *suivant une loi déterminée.*

1° *Établir qu'il n'est pas possible, en général, d'associer à chaque point* M *de* (M) *une sphère tangente à* (M) *en ce point et telle que la corde joignant les deux points de contact de cette sphère avec son enveloppe soit la droite* MP *de la congruence issue de* M.

2° *Démontrer que si le problème est possible d'une infinité de manières, la droite* MP *peut être construite en joignant le point* M *au point correspondant d'une surface ayant même représentation sphérique de ses lignes de courbure que* (M).

Épreuve pratique. — *On considère la surface* S *lieu des points dont les coordonnées rectangulaires* X, Y, Z *sont définies par les équations*

$$X = \frac{k(a-c)u + k(b-a)v + b - c}{\sqrt{(a-b)(a-c)(u-v)}},$$

$$Y = \frac{\sqrt{b-c}\sqrt{u^2 - \dfrac{(1+ku)^2}{a-b}}}{u-v},$$

$$Z = \frac{\sqrt{c-b}\sqrt{v^2 - \dfrac{(1+kv)^2}{a-c}}}{u-v},$$

dans lesquelles u et v désignent des variables indépendantes et a, b, c, k des constantes.

Un trièdre trirectangle Mxyz *se meut de manière que dans chacune de ses positions l'arête* Mz *soit normale en* M *à la surface* S *et l'arête* Mx *tangente à la courbe* (v) *de* S *qui passe au sommet* M.

Exprimer, en fonction de u et v, les différentes quantités ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1 *qui figurent dans les formules relatives au trièdre mobile considéré.*

Étudier, en particulier, les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S; *déterminer, en un point de cette surface, les rayons de courbure principaux.*

(Juillet 1902.)

Lille.

Épreuve écrite. — I. *Étude de la surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche. Éléments qui se conservent dans le développement de cette surface.*

II. *Trouver la section droite d'un cylindre, sachant que, pour une hélice tracée sur ce cylindre, le rayon de courbure est une fonction linéaire de l'arc. Étudier pour une pareille hélice : 1° le lieu des centres de courbure; 2° le lieu des centres des sphères osculatrices; 3° le lieu des points centraux des normales principales.*

(*Voir* Tisserand et Painlevé, *Exercices d'Analyse*, p. 112 et suiv.) (Juillet 1902.)

Question de Cours. — *Une courbe plane roule sans glisser sur une autre courbe plane. On demande :*

1° *Le lieu des points d'inflexion des trajectoires décrites par les différents points du plan de la courbe mobile;*

2° *Le lieu des centres de courbure des lignes enveloppées par les droites du plan mobile.*

Appliquer les résultats obtenus à l'étude du cas où des points liés à la courbe mobile décrivent deux droites dans le plan de la courbe fixe.

Problème. — *On considère la surface de révolution définie par les équations*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = f(u).$$

1° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques projetées sur le plan* xOy;

2° *Déterminer le méridien de telle sorte que toutes ces courbes projections des asymptotiques soient des cercles; on examinera en particulier le cas où ces cercles passeraient par l'origine* O. (Novembre 1902.)