

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 237-239

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__237_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1941.

(1902, p. 480.)

Soient abc , $a'b'c'$ et $a''b''c''$ trois triangles inscrits à une hyperbole équilatère et d'orthocentres d , d' , d'' . Si α , β , γ et δ sont les orthocentres des triangles $aa'a'$, $bb'b''$, $cc'c''$ et $dd'd''$, δ est l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$.

(DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. R. GILBERT.

Considérons neuf points sur une hyperbole équilatère, groupons-les par trois, les orthocentres des triangles ainsi formés sont trois points de la courbe, sommets d'un triangle dont l'orthocentre est indépendant de la façon dont on a groupé les points. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que si l'on échange deux sommets a , a' des triangles abc , $a'b'c'$ la droite des orthocentres de ces triangles reste parallèle à elle-même. Car l'orthocentre final sera à l'intersection de l'hyperbole avec la perpendiculaire à cette direction menée par l'orthocentre de $a''b''c''$.

Soient donc h , h' , k , k' les centres des hauteurs des quatre triangles abc , $ab'c'$, $a'bc$ et $a'b'c'$. Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les côtés de l'hexagone $h'ah k'a'kh'$ pris dans cet ordre. L'hexagone est inscrit à l'hyperbole; or les côtés 1 et 4 sont parallèles; de même 2 et 5. Donc aussi 3 et 6.

C. Q. F. D.

1963.

(1903, p. 96.)

Rectifier la courbe représentée par

$$x^4 \left(\frac{a^2}{x^2} - 1 \right) - y^4 \left(\frac{b^2 + 2x^2}{y^2} + 1 \right) = 0.$$

(G. FLEURI.)

SOLUTION

Par M. C. ALASIA.

Faisons

$$x = \rho \sin \varphi, \quad y = \rho \cos \varphi,$$

et après quelques transformations l'équation donnée s'écrira

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = \rho^2.$$

Posons $a^2 \tan^2 \varphi = b^2 \sec^2 \omega$, et nous aurons

$$\frac{ds}{d\omega} = ab \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 \omega}}{b^2 + a^2 \cos^2 \omega},$$

ou bien, après avoir fait

$$1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \sin^2 \omega = p, \quad 1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \sin^2 \omega = q;$$

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{q}{p\sqrt{q}} = \frac{b}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a^2 - b^2}{p\sqrt{q}} + \frac{b^2}{\sqrt{q}} \right).$$

L'intégration donne

$$s = \frac{b}{a} \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{d\omega}{p\sqrt{q}} + \frac{b^3}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{d\omega}{\sqrt{q}}.$$

Si l'on avait $a = b$ on aurait évidemment

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \omega}},$$

car alors la courbe est une lemniscate.

1968.

(1903, p. 144.)

Sur toute normale à une conique, le pied de cette normale, le centre de courbure, le point de Frégier et le milieu du segment limité à la conique forment une division harmonique.

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. CANON.

Appelons i le point de Frégier sur la normale en a à la conique, γ le centre de courbure de la conique relatif au point a , et j le point où cette normale coupe la conique.

On a la relation connue

$$\frac{1}{2a\gamma} + \frac{1}{aj} = \frac{1}{ai}.$$

Le point m étant le milieu du segment aj , on peut l'écrire

$$\frac{1}{2a\gamma} + \frac{1}{2am} = \frac{1}{ai}$$

ou

$$\frac{1}{a\gamma} + \frac{1}{am} = \frac{2}{ai}.$$

Donc, etc.

Autrement : Prolongeons le segment ai de sa propre longueur jusqu'en i' , prolongeons de même $a\gamma$ de sa longueur jusqu'en γ' ; il s'agit maintenant de démontrer que les points a , i' , j , γ' forment une division harmonique.

Par le point a menons les cordes rectangulaires ab , ac ; la droite bc passe alors par le point i . Parallèlement à ac menons la droite bg qui coupe la normale aj au point g ; les triangles semblables iac , igb donnent

$$\frac{ia}{ig} = \frac{ic}{ib}.$$

Si le point b vient se confondre avec a , le point i ne change pas de position, le point g vient en γ' et l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{ia}{i\gamma'} = \frac{ij}{ia},$$

d'où

$$\overline{ia}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{i\gamma'}^2 = ij \times ia.$$

Donc, etc.