NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur les entiers algébriques de la forme $x + y\sqrt{-5}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 209-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__209_1>

[I22d]

SUR LES ENTIERS ALGÉBRIQUES DE LA FORME $x + y\sqrt{-5}$;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. On appelle *entiers algébriques du second degré* les racines des équations de la forme

$$X^2 + pX + q = 0,$$

p et q étant entiers, $p^2 - 4q$ n'étant pas carré parfait. Ces entiers algébriques sont de la forme

$$a + b\sqrt{M},$$

M étant un entier autre que 1, sans facteur carré, a et b ne pouvant être que des entiers ou des fractions de dénominateur 2.

Le produit des racines de l'équation, soit

$$a^2 - Mb^2,$$

devant être entier, si l'un des nombres a et b est de la forme $\frac{2n+1}{2}$, il en est de même de l'autre, et l'on doit avoir alors $M = 4m + 1$.

2. Les entiers algébriques de la forme

$$x + \theta y \qquad (\theta = \sqrt{-5})$$

correspondent donc à *x et y entiers* (il n'en serait pas de même avec $\sqrt{-3}$). Les lois de la divisibilité dans le domaine de ces nombres ne sont pas les mêmes que dans le domaine des entiers ordinaires; on a par exemple

$$21 = 3 \times 7 = (1 + 2\theta)(1 - 2\theta) = (4 + \theta)(4 - \theta),$$

les facteurs de chaque produit étant premiers dans le domaine considéré. C'est pour détruire de telles anomalies que Kummer a créé ses *nombres idéaux*, que Dedekind a imaginé ensuite les ensembles qu'il appelle des *idéaux* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1877). Je ne sais si la théorie de Kummer permet, en général, d'expliciter les facteurs idéaux; cela est facile dans l'exemple actuel, comme on va le voir, en introduisant ces facteurs d'une manière assez naturelle.

3. Les normes des entiers $x + \theta y$ sont les nombres de la forme $x^2 + 5y^2$. *Élargissons le domaine de ces normes,* et considérons tous les nombres réels, représentables par une forme quadratique du déterminant 5,

c'est-à-dire tous les nombres des deux formes

$$x^2 + 5y^2, \quad 2x^2 + 2xy + 3y^2,$$

ou encore les nombres représentables par les expressions

$$x^2 + 5y^2, \quad \frac{(2x+y)^2 + 5y^2}{2};$$

nous écrirons de préférence

$$(1) \qquad x^2 + 5y^2,$$

$$(2) \qquad \frac{z^2 + 5y^2}{2} \qquad (z - y = 2x).$$

Considérons alors le domaine des nombres qui ont l'une ou l'autre des deux formes

$$(3) \qquad x + \theta y,$$

$$(4 \qquad \frac{z + \theta y}{\sqrt{2}} \qquad (z - y = 2x).$$

Le produit de plusieurs nombres du domaine est un nombre du domaine, appartenant à la forme (3) ou à la forme (4) selon que le nombre des facteurs de la forme (4) est pair ou impair. En suivant la même marche que pour les entiers imaginaires de Gauss, on peut voir directement (sans s'appuyer sur la théorie des formes quadratiques) que *les lois de la divisibilité, dans le domaine des nombres* (3) *et* (4), *sont les mêmes que dans le domaine des entiers ordinaires.*

4. Les nombres premiers de la forme (3) comprennent :

1° Les nombres premiers réels, qui sont congrus à 11, 13, 17, 19 (mod 20);

2° Le nombre θ, qui correspond à $x = 0$, $y = 1$;

3° Les nombres $x + \theta y$ dont les normes sont les nombres premiers ordinaires congrus à 1, 9 (mod 20).

Les nombres premiers de la forme (4) comprennent :

1° Le nombre $\sqrt{2}$, qui correspond à $z = 2$, $y = 0$;

2° Les nombres $\frac{z + \theta y}{\sqrt{2}}$ $(z - y = 2x)$ dont les normes sont les nombres premiers ordinaires congrus à 3, 7 (mod 20).

5. La norme d'un nombre du domaine peut s'écrire :

$$\begin{aligned} N = P^2 \times 5^p \times (x + \theta y)^\alpha (x - \theta y)^\alpha \ldots \\ \times 2^r \times \left(\frac{z + \theta Y}{\sqrt{2}}\right)^\lambda \left(\frac{z - \theta Y}{\sqrt{2}}\right)^\lambda \ldots, \end{aligned}$$

P étant un produit de facteurs premiers congrus à 11, 13, 17, 19 (mod 20), les facteurs $x + \theta y$, ..., $\frac{z + \theta Y}{\sqrt{2}}$, ... étant premiers, ou encore

$$\begin{aligned} N = P^2 \times 5^p \times a^\alpha b^\beta \ldots \\ \times 2^r \times l^\lambda m^\mu \ldots, \end{aligned}$$

les nombres premiers a, b, ... étant congrus à 1, 9 (mod 20), les nombres premiers l, m, ... étant congrus à 3, 7 (mod 20).

Quand on cherche à mettre le nombre N sous l'une des formes (1) et (2), si l'on fait

$$\begin{aligned} p &= 2p' + \pi \qquad (\pi = 0 \text{ ou } 1), \\ r &= 2r' + \rho \qquad (\rho = 0 \text{ ou } 1), \end{aligned}$$

chacun des nombres x et y dans le premier cas, z et y dans le second cas, doit renfermer en facteurs

$$P \times 5^{p'} \times 2^{r'},$$

de sorte qu'on est ramené à considérer le nombre

$$\begin{aligned} N' = \quad 5^\pi \times a^\alpha b^\beta \ldots \\ \times 2^\rho \times l^\lambda m^\mu \ldots. \end{aligned}$$

1° Le nombre N′ peut prendre la forme (1) ou la forme (2) selon que $\rho + \sum \lambda$ est pair ou impair

$$6 = 1^2 + 5.1^2, \qquad 3 = \frac{1^2 + 5.1^2}{2};$$

le résultat est le même pour le nombre N, en considérant $r + \sum \lambda$.

2° Le nombre des décompositions *propres* de N′ est 2^{k-1}, k étant le nombre des facteurs premiers *distincts* du nombre

$$N'' = a^\alpha b^\beta \ldots \times l^\lambda m^\mu \ldots,$$

supposé différent de 1.

Exemple :

$$21 = 3 \times 7 = \frac{1+\theta}{\sqrt{2}} \frac{1-\theta}{\sqrt{2}} \frac{3+\theta}{\sqrt{2}} \frac{3-\theta}{\sqrt{2}};$$

selon que l'on groupe le premier facteur avec le troisième ou le quatrième, on a

$$21 = 1^2 + 5.2^2 \quad \text{ou} \quad = 4^2 + 5.1^2.$$

Pour $N'' = 1$, c'est-à-dire $N' = 1, 5, 2, 10$, il y a une décomposition.

3° Le nombre total des décompositions, tant propres qu'impropres, du nombre N′ ou du nombre N, est égal au nombre des décompositions du nombre N″ en un produit de deux facteurs :

$$N'' = 27, \qquad N = 54 = 7^2 + 5.1^2 = 3^2 + 5.3^2,$$
$$N'' = 81, \qquad N = 81 = 1^2 + 5.4^2 = 6^2 + 5.3^2 = 9^2 + 5.0^2.$$

La démonstration des ces faits est analogue à celle des faits du même ordre, relatifs aux entiers imaginaires de Gauss.

6. Je signale ceci en terminant. Les nombres de la forme

$$x = \frac{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{-5} + d\sqrt{2}\sqrt{-5}}{\sqrt{2}},$$

a, b, c, d étant entiers, a et c étant de même parité, sont des entiers algébriques; le produit de deux nombres de cette forme est un nombre de même forme. Il y aurait lieu d'étudier ces nombres au point de vue de leur divisibilité.