Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 188-191
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__188_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1549.

(1885, p. 438.)

Une ellipse de grandeur invariable (demi-axes a et b) se déplace de façon à rester tangente à une droite donnée en un point donné; démontrer que le lieu géométrique du centre de cette ellipse est une courbe fermée du quatrième degré, dont l'aire a pour expression $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Nous utiliserons des formules employées par M. Barisien pour une question analogue (voir *J. M. S.*, 1898, p. 158). Si θ désigne l'angle aigu que fait une tangente avec le grand axe d'une ellipse d'équation $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, l'équation de la tangente est

$$x\sin\theta+y\cos\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

et celle de la normale est

$$x \cos\theta - y \sin\theta = \frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}},$$

en sorte que les distances δ_c et Δ_c du centre à chacune de ces droites sont

$$\delta_c = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}$$

et

$$\Delta_c = \frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}}.$$

Si donc l'ellipse d'axes $2a$, $2b$ se meut en restant tangente à l'axe des x à l'origine, les coordonnées du centre sont

$$(1) \qquad x = \frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}},$$

$$(2) \qquad y = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

En outre

$$(3) \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

De (2) et (3) on tire

$$\sin^2\theta = \frac{y^2 - b^2}{a^2 - b^2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{y^2 - a^2}{b^2 - a^2}.$$

Mais (1) peut s'écrire

$$x^2 y^2 = (a^2 - b^2)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta = -(y^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

Le lieu est donc

$$x^2 y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0.$$

C'est une quartique circulaire fermée.

L'aire A de cette courbe s'obtient aisément en considérant les équations (1) et (2),

$$dy = \frac{(a^2 - b^2) \sin\theta \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}},$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

Prenant $\tang\theta = t$ pour variable il vient

$$A = 2(a^2 - b^2)^2 \int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2(a^2t^2+b^2)}.$$

Or

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2(a^2t^2+b^2)}$$
$$= \frac{-1}{a^2-b^2}\,\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{a^2}{(a^2-b^2)^2}\,\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}\,\frac{1}{a^2t^2+b^2}.$$

Donc

$$A = 2\left((b^2-a^2)\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} + a^2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - ab\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1+\left(\frac{at}{b}\right)^2}\right).$$

Remarquant que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tang} t)_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1+\left(\frac{at}{b}\right)^2} = \left(\operatorname{arc\,tang}\frac{at}{b}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$A = 2\left(\frac{b^2-a^2}{4}\pi + \frac{a^2\pi}{2} - \frac{ab\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION PROPOSÉE

Par M. E.-N. Barisien.

Glissette d'un point donné du plan de l'ellipse. — Soient α et β les coordonnées de ce point par rapport aux axes de symétrie de l'ellipse, on trouve pour les coordonnées de ce point par rapport aux axes de coordonnées Ox, Oy

$$X = \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta + \frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},$$

$$Y = \alpha\sin\theta + \beta\cos\theta + \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta},$$

et pour l'aire de l'une des deux ovales de la glissette

$$U = \frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \pi(\alpha^2 + \beta^2).$$

En particulier, pour le lieu de la *glissette des foyers* $(\alpha = \pm c, \beta = 0)$, on a

$$U = \frac{\pi}{2}(a - b)(3a + b).$$

L'équation cartésienne de cette glissette est du sixième degré

$$X^2(Y^2 + b^2)^2 + Y^2(Y^2 - b^2)^2 = 4c^2Y^4$$

ou encore

$$X^2 = \frac{Y^2[(a + c)^2 - Y^2][Y^2 - (a - c)^2]}{(Y^2 + b^2)^2}.$$

L'aire de la podaire du point (α, β) par rapport à la développée de l'ellipse est

$$V = \frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

On a, par conséquent, la relation curieuse

$$V - \frac{U}{2} = \frac{\pi}{4}(a - b)^2,$$

indépendante de la position du point (α, β).

On a aussi pour l'aire de la podaire de l'ellipse par rapport au point (α, β),

$$W = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2),$$

avec la relation

$$W - \frac{U}{2} = \frac{\pi}{4}(a + b)^2.$$