

Certificats d'études supérieures

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 3
(1903), p. 137-141

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__137_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

Caen.

I. Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, trouver le lieu S d'une circonférence qui s'appuie sur OZ tandis que son plan reste parallèle à OXY et que son centre décrit la droite $y = 0, x + z = a$. Calculer le volume V compris entre les parties positives des plans coordonnés, le plan $x = a$ et la surface S. Lignes de plus grande pente de S par rapport au plan des xy .

II. Une barre OP, très mince, homogène, de longueur $2l$, peut tourner dans un plan H autour de l'extrémité O qui est fixe; chacun de ses éléments est attiré vers un point A du plan H avec une force égale au produit d'une constante ω^2 par la masse de l'élément et par sa distance au point A; OA est égal à $\frac{2}{3}l$. A l'instant initial, l'angle POA est droit et la barre animée d'une vitesse angulaire ω de sens tel que l'angle POA commence par croître. Déterminer le mouvement de la barre.

III. ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage du Soleil au périégée jusqu'à l'instant où son ascension droite est de 225° .

SOLUTIONS.

(I). S est un cône, $x^2 + y^2 - 2(a - z)x = 0$.

V est égal à $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{9}\right)a^3$.

Les lignes de pente se projettent sur OXY suivant des cercles touchant OY à l'origine.

(II). Si $\text{POA} = \theta$, on a

$$\frac{4}{3} l^2 \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} - \omega^2 \right) = \frac{4}{3} l^2 \omega^2 \cos \theta, \quad \omega dt = \frac{d\theta}{\cos \frac{1}{2} \theta}.$$

(Juillet 1901.)

I. *Trouver une surface de révolution telle qu'en un quelconque de ses points M, un des centres principaux de courbure soit à la même distance de l'axe que M. Considérant la portion de surface comprise entre les plans tangents en deux de ses points de rencontre consécutifs avec l'axe, calculer son aire A et le volume V qu'elle limite.*

II. *Mouvement d'un point pesant sur un cône à axe vertical, dont la base, de rayon a, est à une distance a au-dessous du sommet : à l'instant initial, la vitesse est horizontale et égale à \sqrt{ga} , le mobile étant à la distance $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ du sommet.*

III. *ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon d'un point dont la latitude est boréale et égale à $47^{\circ} 29'$, le jour du solstice d'été, l'heure sidérale étant de $11^{\text{h}} 25^{\text{m}}$: l'obliquité de l'écliptique est $23^{\circ} 27'$.*

SOLUTIONS.

(I). La méridienne est une cycloïde : a étant le rayon du cercle générateur, on a

$$A = \frac{64}{3} \pi a^2, \quad V = 5 \pi^2 a^3.$$

(II). Projection horizontale de la trajectoire

$$d\psi = \frac{a \sqrt{5} a dr}{r(r+a) \sqrt{2r-a}}.$$

(Novembre 1901.)

I. *Une droite MP, de longueur donnée, se meut dans un plan en restant tangente à la trajectoire (C) de son extrémité M :*

1° *Prouver que la normale en P à la trajectoire (T) du point P passe au centre de courbure de (C) en M ;*

2° Déterminer (C) de manière que (T) soit une droite Δ : construire et rectifier la courbe trouvée (Γ);

3° Montrer qu'en un point quelconque de la surface S engendrée par la révolution de Γ autour de Δ , le produit des rayons de courbure principaux est constant; reconnaître que S et la sphère ne sont pas les seules surfaces de révolution qui jouissent de cette propriété.

II. Mouvement d'une barre pesante et homogène dont les extrémités glissent sans frottement sur une hélice coupant sous un angle de 45° les génératrices d'un cylindre à axe vertical : la vitesse initiale est nulle.

III. ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'heure moyenne à midi vrai, le jour du solstice d'été ($1^m 35^s$).

(Juillet 1902.)

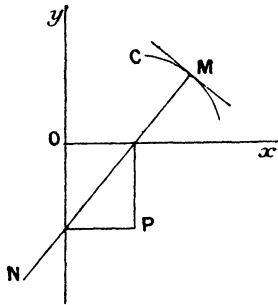
Lyon.

I. Mouvement d'un point pesant dans un milieu résistant, quand la résistance dépend de la vitesse seule, suivant une loi donnée.

II. Intégrer

$$(x^2 + y^2) dx = 2xy dy.$$

III. La normale MN, en M, à la courbe C définit, par la construction indiquée sur la figure, le point P.



Quel est le lieu \bar{P} de P lorsque la courbe C, parcourue par M, est la parabole

$$y^2 = 2px?$$

SOLUTIONS.

On ne donnera la solution que de III. Les problèmes I et II sont des applications immédiates du cours.

La normale MN au point M(x, y) a pour équation

$$(u - x) dx + (v - y) dy = 0.$$

Faisons successivement $v = 0$ et $u = 0$, on a, pour les coordonnées de P,

$$u = x + \frac{y dy}{dx}, \quad v = y + \frac{x dx}{dy}.$$

Pour la parabole, tout calcul fait, il vient

$$u = x + p, \quad v = \frac{xy}{p},$$

c'est-à-dire

$$pv^2 = (u - p)^3,$$

pour le lieu \bar{P} . C'est une cissoïde facile à construire.

(Novembre 1902.)

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie de la réflexion totale.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans le phénomène de la réflexion totale, les petits déplacements vibratoires de l'éther, produits sur la surface réfléchissante, sont décroissants aux diverses distances x de cette surface, comme l'exponentielle*

$$e^{-\frac{2\pi x}{\tau\omega} \sqrt{\sin^2 i - N^2}}$$

où τ est la période de vibration, ω la vitesse de propagation de la lumière au-dessus de la surface, N l'indice de réfraction et i l'angle d'incidence.

On demande à quelle fraction de leur valeur à la sur-

face sont réduits ces DÉPLACEMENTS, aux distances respectives $x = \tau\omega$ et $x = 2\tau\omega$ de UNE et DEUX longueurs d'onde, quand l'indice N de réfraction est $\frac{2}{3}$, ce pour une incidence $i = 75^\circ$.

On a

$$e = 2,71828, \quad \pi = 3,14159.$$

(Juillet 1902.)
