NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LOCHARD

Recherche géométrique de la surface gauche minima

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 127-132

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__127_1>

[O6h]

RECHERCHE GÉOMÉTRIQUE DE LA SURFACE GAUCHE MINIMA;

PAR M. A. LOCHARD.

1. Je me propose d'établir que la solution de ce problème peut être obtenue par des considérations de Géométrie infinitésimale pure.

Les deux familles de lignes asymptotiques de toute surface minima forment un réseau orthogonal.

Cette proposition, que je prendrai comme point de départ, résulte de ce que la courbure moyenne des surfaces minima est nulle, et cette dernière propriété peut elle-même être déduite par la Géométrie infinitésimale de la propriété fondamentale qui a valu leur nom à ces surfaces [1].

---

[1] *Voir* H. POINCARÉ, *Théorie de la Capillarité*. On trouvera également dans cet Ouvrage la démonstration géométrique de la constance de l'angle de raccordement des surfaces minima, et une belle étude géometrique des surfaces de révolution à courbure moyenne constante.

Les génératrices rectilignes d'une surface gauche minima, qui constituent les lignes asymptotiques de la première famille, sont donc normales aux lignes asymptotiques de la seconde famille. Or le plan osculateur à une ligne asymptotique est le plan tangent à la surface. Donc le problème proposé équivaut au suivant :

Trouver une famille de courbes gauches ayant les mêmes normales principales.

2. Je m'appuierai sur les propositions suivantes de la théorie des courbes parallèles dans l'espace ou sur la sphère, qu'on démontre aisément en Géométrie cinématique :

Étant donnée une famille de droites dans l'espace ou de grands cercles sur la sphère :

1° *Le lieu des extrémités des segments de longueur constante portés sur ces droites ou sur ces cercles à partir d'une de leurs trajectoires orthogonales est encore une de leurs trajectoires orthogonales.*

2° *Réciproquement, des segments égaux sont interceptés sur ces droites ou sur ces cercles par deux de leurs trajectoires orthogonales.*

3. Je rappellerai en outre qu'on nomme *indicatrice sphérique* d'une courbe gauche C le lieu Γ des points où une sphère de rayon 1 est percée par les droites menées par son centre parallèlement aux tangentes à C.

La tangente à Γ est évidemment parallèle à la normale principale au point correspondant de C.

4. Je puis maintenant démontrer les deux lemmes suivants, dus à J. Bertrand :

Lemme I. — *Lorsque deux courbes ont les mêmes normales principales, l'angle de leurs plans osculateurs en deux points situés sur la même normale est constant.*

En effet, les tangentes à leurs indicatrices sphériques aux points correspondants sont parallèles, et perpendiculaires au plan de l'arc de grand cercle qui joint ces deux points. Donc (n° 2), cet arc de grand cercle, qui mesure précisément l'angle des plans osculateurs, est constant. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Lorsque trois courbes ont les mêmes normales principales, ces droites sont les normales principales d'une quelconque de leurs trajectoires orthogonales.*

Soient M, M', M'', N les points des trois courbes et d'une trajectoire orthogonale quelconque de leurs normales principales situés sur la même normale G. Les distances réciproques de M, M', M'', N sont constantes quelle que soit G (n° 2); or, les plans tangents, aux trois points M, M', M'', à la surface gauche lieu de G font entre eux des angles constants (lemme I); donc le paramètre de distribution des plans tangents à cette surface suivant une génératrice G est constant : donc le plan tangent en N fait un angle constant avec les plans tangents en M, M', M''.

Les indicatrices sphériques (m), (m'), (m'') des courbes (M), (M'), (M'') sont parallèles (lemme I); le point n, correspondant à N, de l'indicatrice sphérique (n) de la courbe (N) est situé sur l'arc de grand cercle $mm'm''$ normal à $(m)(m')(m'')$, et, d'après ce que je viens de démontrer, à une distance constante de m, m' et m''. Donc (n) est parallèle à (m), (m'), (m'') (n° 2), et par suite G est la normale principale de (N).

C. Q. F. D.

5. Théorème III. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes.*

En effet, d'après la constance du paramètre de distribution des plans tangents (lemme II), le point central sur chaque génératrice est à une distance constante du point, situé sur la même génératrice, d'une trajectoire orthogonale quelconque des génératrices. D'où résulte la proposition (n° 2).

Théorème IV. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une ligne asymptotique de la surface.*

Ou :

Son plan osculateur est tangent à la surface.

C'est un corollaire immédiat du lemme II et du théorème III.

Théorème V. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une ligne géodésique de la surface.*

Ou :

Son plan osculateur est normal à la surface.

Soient

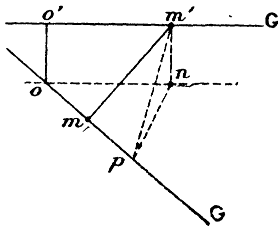
G, G' deux génératrices rectilignes infiniment voisines;
OO' leur perpendiculaire commune;

m et m' les points, infiniment voisins de O et de O', où elles rencontrent la ligne de striction;

n le pied, sur le plan mené par G parallèlement à G', de la parallèle à OO' menée par m';

$m'p$ la perpendiculaire à G', qui rencontre G.

Laissons indéterminé l'infiniment petit principal. Soient α, β, γ les ordres respectifs des segments $O'm'$ et OO' et de l'angle nOp. Les angles Onp et $m'np$ étant



droits, np est de l'ordre $\alpha + \gamma$ et par suite l'angle $nm'p$ de l'ordre $\alpha + \gamma - \beta$: $\alpha + \gamma - \beta$ est positif, car si γ était inférieur à β, l'angle npm' serait infiniment petit d'ordre $\beta - \gamma$ au moins quelle que soit la position du point m' sur G, et par suite la surface serait développable, hypothèse inadmissible. Dès lors les angles $mm'p$ (théorème III) et $nm'p$ étant infiniment petits, il en est de même de l'angle $mm'n$. Donc, en passant à la limite :

La tangente à la ligne de striction coïncide avec la perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines.

La considération du cône directeur de la ligne de striction et du cône supplémentaire montre alors qu'inversement une génératrice rectiligne est perpendiculaire au plan osculateur de la ligne de striction.

C. Q. F. D.

Théorème VI. — *La ligne de striction d'une surface gauche minima est une droite.*

C'est un corollaire immédiat des théorèmes IV et V : le plan osculateur est nécessairement indéterminé en tous les points de cette ligne.

Théorème VII. — *Toute surface gauche minima est une surface de vis à filet carré.*

En effet, d'après les théorèmes III et VI, c'est un conoïde droit. En outre, d'après la constance du paramètre de distribution, les lignes asymptotiques de la seconde famille sont des courbes, tracées sur des cylindres de révolution autour de la droite de striction, et dont les tangentes font un angle constant avec cette droite; ce sont donc des hélices, d'où, etc.

C. Q. F. D.