Nouvelles annales de mathématiques

A. Mannheim

Sur le théorème de Schœlcher

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 105-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__105_0>

[$M^2 4 i \delta$]

SUR LE THÉORÈME DE SCHŒLCHER;

PAR M. A. MANNHEIM.

A Marseille, en 1891, le colonel Schœlcher a présenté, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, un Mémoire intitulé : *Théorie générale des hélices*. Ce travail ne figure au *Compte rendu* du Congrès que par une très courte analyse; malgré cela, on y trouve la « propriété de la troisième section circulaire du tore de couper tous les méridiens suivant un angle constant ».

Cette troisième section circulaire du tore a été découverte en 1848 par Yvon Villarceau (voir *Comptes rendus*). A ma connaissance, depuis cette époque, on n'avait pas remarqué le joli théorème de Schœlcher [1] qu'on peut énoncer ainsi :

Sur un tore les cercles de Villarceau sont des loxodromies.

Par un point M d'un tore passent deux cercles de Villarceau, symétriques par rapport au plan méridien mené par M; l'angle de ces deux cercles est alors double de l'angle que fait l'un deux avec le cercle méridien en M, par suite :

L'angle compris entre les deux cercles de Villar-

[1] A la page 161 du *Bulletin des Sciences mathématiques* pour 1902, on trouve l'énoncé de ce théorème extrait d'un travail de M. Holzmüller publié dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, mais il faut remarquer que ce travail n'a paru qu'en 1899.

ceau, qui passent par un point M *d'un tore, est toujours le même, quelle que soit la position de* M.

La démonstration de ce théorème, d'après ce qui précède, entraîne celle du théorème de Schœlcher; elle est très simple comme on va le voir.

La sphère, qui contient les deux cercles de Villarceau qui passent par M, est doublement tangente au tore; appelons O le point où elle coupe l'axe de révolution de cette surface. Prenons O comme pôle d'inversion et choisissons la puissance d'inversion de façon que le tore se transforme en lui-même. La sphère a pour transformée un plan doublement tangent au tore, et les deux cercles de Villarceau qu'elle contient ont pour transformés les cercles résultant de l'intersection du tore par ce plan tangent. L'angle de ces derniers cercles est constant, quel que soit le plan doublement tangent au tore, il en est alors de même de l'angle des deux cercles de Villarceau qui passent par un point arbitraire M.

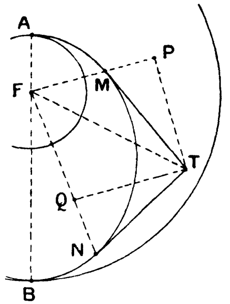
On peut aussi énoncer le théorème de Schœlcher en disant :

Les cercles d'intersection d'un tore par des plans bitangents coupent sous des angles égaux les lignes de courbure d'un même système de cette surface.

Sous cette forme, le théorème de Schœlcher s'étend immédiatement par inversion à la cyclide de Dupin. Je ne m'arrête pas à cette extension, n'ayant en vue ici que le théorème de Schœlcher, dont je vais donner maintenant une démonstration directe.

Faisons une projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution du tore. Soit AMNB une ellipse projection d'un cercle de Villarceau. La projection F de l'axe du tore est un foyer de cette ellipse.

Sur cette courbe, prenons les points arbitraires M, N, projections des points M′, N′, et menons les tangentes MT, NT. La droite FT étant la bissectrice de l'angle MFN, il en résulte que les distances TP, TQ du point P aux



côtés de cet angle sont égales. Remarquons tout de suite que les segments de l'espace T′P′, T′Q′, parallèles au plan de projection et qui se projettent en TP, TQ, sont parallèles aux tangentes en M′, N′ aux cercles qui sont des parallèles du tore.

Les tangentes T′M′, T′N′ au cercle de Villarceau sont égales. Les segments T′P′, T′Q′ sont égaux. Par suite, les triangles rectangles de l'espace T′M′P′, T′N′Q′ sont égaux et leurs angles en T′ sont alors égaux. D'après la remarque qui vient d'être faite, le cercle de Villarceau coupe donc les parallèles du tore en M′ et N′ sous des angles égaux.

Si l'on fait varier l'un de ces points, l'autre restant fixe, on voit qu'au point variable l'angle du cercle de Villarceau avec le parallèle du tore est toujours de même grandeur, puisqu'il est constamment égal à un angle fixe. Le théorème est ainsi démontré.

J'espère que cette courte Note appellera l'attention sur le très intéressant théorème de Schœlcher.