NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur les groupes qui dépendent de fonctions arbitraires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 77-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__77_1>

[H8]

SUR LES GROUPES QUI DÉPENDENT DE FONCTIONS ARBITRAIRES;

PAR M. H LAURENT.

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \qquad Af = 0$$

où l'on a posé

$$Af = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$A_1, A_2, \ldots$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il est facile de voir que cette équation admet un groupe très général de substitutions. Si, en effet, on substitue aux x de nouvelles variables y, l'équation (1) devient

$$Ay_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + Ay_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \ldots + Ay_n \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,$$

et elle restera invariante, si l'on a

$$(2) \quad Ay_1 = \lambda B_1, \qquad Ay_2 = \lambda B_2, \qquad \ldots, \qquad Ay_n = \lambda B_n,$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ désignant ce que deviennent $A_1, \ldots, A_n$, quand on y remplace x_1 par y_1, x_2 par y_2, ..., [plus généralement : $Af = 0$ se transformera en $Bf = 0$, si les relations (2) ont lieu quels que soient les B supposés donnés en $y_1, y_2, \ldots, y_n$]; λ est alors un facteur quelconque.

Les équations (2) sont d'un type remarquable, considéré par Jacobi; on les intègre en posant (*voir* mon *Traité d'Analyse*, t. VI)

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{dy_1}{\lambda B_1} = \ldots = \frac{dy_n}{\lambda B_n}, \tag{3}$$

et si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ sont les fonctions qui, égalées à des constantes arbitraires, représentent les intégrales de ce système (3) (où λ est quelconque)

$$\Phi_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}) = 0, \tag{4}$$

les Φ désignant des fonctions arbitraires, seront les intégrales générales de (2).

Or, les équations (3) peuvent s'intégrer en considérant à part les systèmes

$$\frac{dx_1}{A_1} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n} \tag{5}$$

et

$$\frac{dy_1}{B_1} = \ldots = \frac{dy_n}{B_n}, \tag{6}$$

dont les intégrales sont respectivement de la forme

$$X_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad X_{n-1} = \text{const.}$$

et

$$Y_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad Y_{n-1} = \text{const.},$$

les Y ne différant des X que parce que x_1 y est remplacé par y_1, x_2 par y_2, ...

A ces formules il faudra adjoindre une dernière équation de la forme

$$X_n = Y_n + \text{const.}$$

obtenue en intégrant une dernière équation de la forme

$$dx_1.F(x_1) = dy_1.G(y_1),$$

X_n ne dépendra que des x et Y_n que des y ; j'ajoute que, si l'on prend $\lambda = 1$, X_n et Y_n ne différeront l'un de l'autre que parce que x_1 y sera remplacé par y_1, etc. Alors la *substitution laissant* $Af = 0$ *invariante sera de la forme*

$$(7)\qquad \begin{cases} Y_1 = \psi_1(X_1, \ldots, X_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{n-1} = \psi_{n-1}(X_1, \ldots, X_{n-1}), \\ Y_n = X_n + \psi_n(X_1, \ldots, X_{n-1}). \end{cases}$$

les ψ *désignant des fonctions arbitraires. En général on a*

$$X_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y_i(y_1, \ldots, y_n),$$

excepté si $i = n$, *mais si cette formule a encore lieu pour* $i = n$, *ce n'est plus seulement l'équation* $Af = 0$ *qui sera invariante, mais l'expression elle-même* Af *restera invariante.*

On voit aussi qu'il existe une substitution très générale changeant Af en Bf ou $Au = 0$ en $Bu = 0$, les A et les B étant donnés.

Le groupe qui laisse $Af = 0$ invariante permute évidemment les intégrales les unes dans les autres : c'est ce qui est évident à l'inspection des formules (7).

Cette propriété dont jouissent les équations linéaires à une inconnue, de posséder un groupe qui les laisse invariantes, appartient exclusivement à ces équations, en ce sens toutefois que ce ne sont que des équations très particulières parmi les équations non linéaires ou linéaires simultanées, qui jouissent de cette propriété.

Le groupe qui laisse $Af = 0$ invariante contient d'autres groupes qui laissent $Af = 0$ invariante en même temps que d'autres équations $A'f = 0$, $A''f = 0$, formant avec $Af = 0$ un système complètement intégrable; ces sous-groupes permutent les intégrales communes.

Le problème que nous venons de résoudre conduit à une autre question intéressante; il nous a conduit à résoudre des équations de la forme

$$(8)\quad \begin{cases} A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} = A_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} + \ldots + A_n(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} = A_n(y_1, \ldots, y_n), \end{cases}$$

les y étant les inconnues. On peut les considérer à un autre point de vue, et les y étant censés connus en fonction des x, on peut se demander quelle est la forme qu'il faut donner aux A pour satisfaire à ces équations (8).

Supposons que la substitution s qui définit les y en fonction des x fasse partie d'un groupe à un paramètre t défini symboliquement par sa substitution infinitésimale Xf, s laissera invariante l'équation $Af = 0$. Si l'on a

$$(XA - AX)f = hAf,$$

c'est-à-dire si l'on a

$$XA_i - AX_i = hA_i,$$

ces équations forment un système d'équations de Jacobi analogue à celui que nous avons rencontré dans la solution du problème inverse; les A sont donc déterminés et l'on connaît des équations $Af = 0$ que la substitution s laisse invariantes, en sorte que s change Af en λAf; alors s changera μAf en $\nu\lambda Af$, en changeant μ en ν. Si alors $\mu = \lambda\nu$, s changera μAf en μAf, ou laissera μAf invariant, il reste donc à trouver une fonction μ que s change en $\frac{\mu}{\lambda}$.

Le problème que nous voulons résoudre admettra donc une solution. Si la substitution donnée fait partie d'un groupe à un paramètre, nous sommes ainsi conduits à résoudre cet autre problème :

Étant donnée une substitution s, trouver le ou les groupes à un paramètre dont elle fait partie.

Considérons la substitution

$$(9) \qquad y_1 = \varphi_1, \qquad y_2 = \varphi_2, \qquad y_n = \varphi_n,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ désignent des fonctions des $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

une équation aux dérivées partielles admettant les intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$; on peut en trouver une dernière intégrale fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et t, se réduisant pour $t = 0$ à $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $y_n = \psi(x_1, \ldots, x_n, t)$ cette intégrale; la substitution

$$y_1 = \varphi_1, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = \varphi_{n-1}, \qquad y_n = \psi$$

sera la substitution générale d'un groupe à un paramètre qui, pour $t = 0$, fournira la substitution (9).

J'ai dit tout à l'heure que les équations non linéaires n'admettaient pas, en général, de substitutions; je vais le prouver en montrant quelle est la classe très restreinte des équations du premier ordre qui jouissent de cette propriété.

Si l'équation

$$(10) \qquad f(x_1, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

où $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, admet une substitution s,

$$(11) \quad y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n),$$

il existe une équation linéaire et homogène (F) admettant la substitution s, et si l'on fait subir un changement de variable t à l'équation (10), elle admettra, après ce changement, la substitution s également, car s changeant par exemple l'intégrale α en α', α' en α'', ..., t changera β intégrale de la transformée (F) en β, st changera α' en une intégrale β' de (F). ...; donc s changera β en β', β' en β'', ...; il existera donc une équation (F) linéaire ayant avec (10), si l'on veut, l'intégrale commune β et les intégrales β', β'', ...

Donc une équation telle que (10), admettant une substitution s, a une série d'intégrales communes avec une équation linéaire. Elle n'est donc pas quelconque; il y a plus : si l'équation (10) admet un groupe à un paramètre, elle aura une intégrale renfermant une constante arbitraire commune avec une équation linéaire, et il est d'ailleurs facile de vérifier par le calcul que, si $f = 0$ admet la substitution infinitésimale Xf, on a

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \right) = \lambda f$$

en posant

$$\Omega = p_1 X_1 + \ldots + p_n X_n.$$